CLASSES DE PREMIERES GÉNÉRALES
ET TECHNOLOGIQUES

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
Académie d'AIX-MARSEILLE
Session 2009

Séries ES, L et Technologiques
CORRECTION

Exercice 1 :

1– **Question préliminaire :**

À l'aide de la calculatrice, $a=9$ et $b=12$ sont les seuls entiers naturels avec $a \leq b$ tels que : $a^2+b^2=225$.

2– **a.** Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\mathrm{BC}^2$. D'où : $\mathrm{BC}^2-\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2=8^2=64$.

b.

$64=1\times 64$

$64=2\times 32$

$64=4\times 16$

$64=8\times 8$

c. Le couple $(y=6\ ;\ z=10)$ est solution du système.

Dès lors, $64=16\times 4=(z+y)(z-y)=z^2-y^2=\mathrm{BC}^2-\mathrm{AC}^2$.

Le couple $(\mathrm{AC}=6\ ;\ \mathrm{BC}=10)$ répond donc à la question.

d. *y* et *z* ont joué le rôle de AC et BC.

Seules des valeurs entières positives de *y* et *z* nous intéressent.

Considérons les autres décompositions de 64 et étudions les systèmes associés compte tenu que $z+y \geq z-y$:

$$\begin{cases} z+y=64 \\ z-y=1 \end{cases} ; \begin{cases} z+y=32 \\ z-y=2 \end{cases} ; \begin{cases} z+y=8 \\ z-y=8 \end{cases}$$

Seul le deuxième système permet d'obtenir des valeurs entières strictement positives. Le couple $(\mathrm{AC}=15\ ;\ \mathrm{BC}=17)$ répond donc à la question.

Remarque : on a déterminé tous les couples $(\mathrm{AC}\ ;\ \mathrm{BC})$ répondant à la question.

3– D'après ce qui précède, soit $\mathrm{AC}=6$, soit $\mathrm{AC}=15$.

Or, il n'existe pas d'entiers naturels avec $a \leq b$ tels que : $a^2+b^2=36$.

Le cas $\mathrm{AC}=6$ est donc exclu.

D'autre part, d'après la question préliminaire, $9^2+12^2=15^2$, 9 et 12 étant les seuls entiers vérifiant $a^2+b^2=225$.

On en déduit : $\mathrm{AC}=15$, $\mathrm{BC}=17$, $\mathrm{AD}=9$ et $\mathrm{DC}=12$.

Exercice 2 :

En ce qui concerne la surface totale des six faces du cube, les réponses possibles sont : $\{6\times1^2\,;6\times2^2\,;6\times3^2\,;...\}$, c'est-à-dire $\{6;24;54;...\}$.
Parmi les réponses proposées, seule 24 convient puisque nous savons qu'un élève a eu 20.

La réponse à la deuxième question est 24.

La réponse à la question :
« Le prix d'une chemise, vendue avant les soldes à 20 €, baisse de 20 %. Quel est son nouveau prix ? » est : $20\times\left(1-\frac{20}{100}\right)=16$.

◆ Supposons que 16 soit la bonne réponse à la première question.

	Réponse à la première question	Réponse à la deuxième question	Réponse à la troisième question	Réponse à la quatrième question
Alex	***16***	18	16	***10***
Carina	12	***24***	12	14
Jérôme	12	***24***	16	18
Lucille	8	18	14	***10***
Myriam	***16***	26	16	14
Nicole	8	***24***	***18***	18
Saïda	8	20	16	***10***
Yves	***16***	***24***	***18***	***10***

Dans ce cas, comme nous le voyons sur le tableau ci-dessus, seul Yves aurait 20, et en considérant les bonnes réponses d'Yves, personne n'aurait 0.
Ce cas est exclu.

16 est donc la réponse à la troisième question.

	Réponse à la première question	Réponse à la deuxième question	Réponse à la troisième question	Réponse à la quatrième question
Alex	16	18	***16***	10
Carina	***12***	***24***	12	14
Jérôme	***12***	***24***	***16***	***18***
Lucille	8	18	14	10
Myriam	16	26	***16***	14
Nicole	8	***24***	18	***18***
Saïda	8	20	***16***	10
Yves	16	***24***	18	10

Jérôme est le seul a pouvoir avoir 20. En considérant les bonnes réponses de Jérôme, les autres notes en découlent : Lucille a eu 0, Alex, Myriam, Saïda et Yves ont eu 5, Carina et Nicole ont eu 10.

Exercice 3 :

Partie A :

1– Plus petite valeur : 6 (=1 + 2 + 3)
2– Plus grande valeur : 24 (= 7 + 8 + 9)

Partie B :

1– Triangle 20-magique :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 2 & & & \\ & & 7 & & 1 & & \\ & 6 & & & & 9 & \\ 5 & & 3 & & 4 & & 8 \end{array}$$

2– **a.** $3S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+T$

b. $\frac{6+45}{3} \leq S \leq \frac{24+45}{3}$ (cf. partie A)

c. (17,6) (18,9) (19,12) (20,15) (21,18) (22,21) (23,24)

3– Triangle 17-magique :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 8 & & 4 & & \\ & 6 & & & & 9 & \\ 2 & & 5 & & 7 & & 3 \end{array}$$

4– Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$.
Aucun des trois nombres n_1, n_4, n_7 n'est 9. 9 serait donc un des six autres nombres.
Considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 9. On peut supposer par exemple que $n_2 = 9$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 18$, d'où
$n_1 + n_3 + n_4 = 9$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.
Il n'existe donc pas de triangle magique tel que $S = 18$.
(On peut aussi envisager toutes les possibilités.)

5– **a.** Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$.
Supposons que 7 ne soit pas sur l'un des sommets et considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 7. On peut supposer par exemple que $n_2 = 7$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 19$, d'où $n_1 + n_3 + n_4 = 12$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$.
Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.
7 est donc nécessairement situé sur l'un des sommets du triangle.

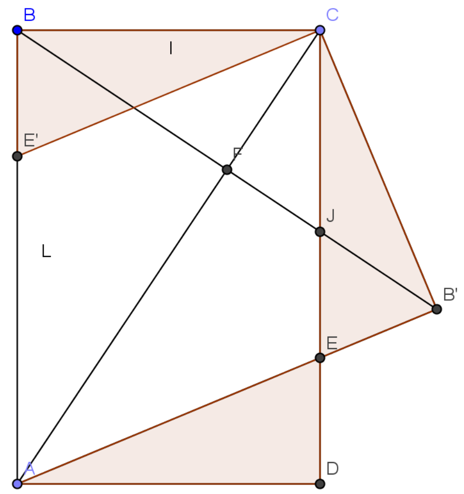
b. Triangle 19-magique

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 7 & & & \\ & & 4 & & 1 & & \\ & 5 & & & & 9 & \\ 3 & & 8 & & 6 & & 2 \end{array}$$

6– Il suffit de remplacer chaque n_i par $10 - n_i$; les sommes sont alors remplacées par $40 - S$ et les $10 - n_i$ sont deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

7- Les valeurs de S pour lesquelles ont peut trouver un triangle *S*-magique sont : 17, 19, 20 (trouvées dans les questions précédentes) et 23, 21 (d'après la question précédente).
Il n'y a pas de triangle 18-magique, et donc pas non plus de triangle 22-magique.

Exercice 4 :



2– Sachant que AE'CE est un losange on a : $(16-c)^2+8^2=c^2$ soit $c = 10$

3– On a nécessairement : $(L-7{,}5)^2+l^2=7{,}5^2$ avec $L \geq 8$
soit : $l^2 = L(15-L)$
d'où les seules réponses entières : L=12 et l=6.
Et ces deux dimensions conduisent bien à un losange de côté 7,5 cm.

4– Sachant que AE'CE est un losange, on a ED=E'B donc les triangles rectangles BCE' et AED sont isométriques. La somme de leurs aires est égale à 25% de l'aire du rectangle.

D'où l'égalité : $(L-c)l = 0{,}25Ll$ d'où $c = 0{,}75L$ d'où $L^2 = 2l^2$ d'où $l = \frac{\sqrt{2}}{2}L$

5– Le pliage correspond à une symétrie axiale d'axe (AC).
Notons B' l'image de B et E l'intersection de (AB') et (CD) (qui sont sécantes) et E' le symétrique de E (E' est sur (AB) car CBE' est un triangle rectangle image de CB'E).
La symétrie assure les égalités de longueurs : CE'=CE et AE=AE'
On conclut avec le parallélisme de (CE) et (AE').

Remarque : Sauf dans le cas où la figure de départ est un carré (identique à la figure d'arrivée, donc un losange), la figure CB'E est bien un triangle extérieur au rectangle ABCD, c'est-à-dire la partie enlevée.
(Il suffirait de dire que FJ < FB' car le triangle AJC a une aire inférieure au triangle ABC, triangles de même base et donc de hauteurs sont classées dans l'ordre souhaité)