CLASSES DE PREMIERES GÉNÉRALES
ET TECHNOLOGIQUES

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
Académie d'AIX-MARSEILLE
Session 2009

Durée : 4 heures

Séries ES, L et Technologiques

Les calculatrices sont autorisées.

Ce sujet comporte 4 exercices indépendants.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte **5 pages** dont celle–ci.

Exercice 1:

1– **Question préliminaire :**

À l'aide de la calculatrice, déterminer tous les entiers naturels a et b avec $a \leq b$ tels que : $a^2 + b^2 = 225$.

2– On cherche tous les triangles ABC rectangles en A, tels que AB = 8 et tels que BC et AC s'expriment à l'aide de nombres entiers.

a. Calculer $\text{BC}^2 - \text{AC}^2$.

b. Donner toutes les décompositions possibles de 64 sous la forme d'un produit de deux entiers naturels.

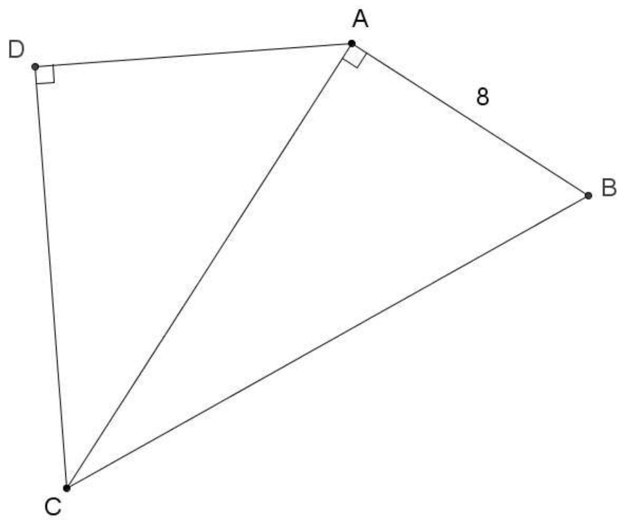
c. y et z étant deux nombres entiers naturels, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} z + y = 16 \\ z - y = 4 \end{cases}.$$

En déduire un couple de valeurs possibles pour AC et BC.

d. Peut-on trouver d'autres couples de valeurs pour AC et BC ?

3– On considère la figure suivante :



Déterminer les longueurs AC, BC, AD et CD sachant que ces longueurs s'expriment à l'aide de nombres entiers.

Exercice 2:

Une épreuve de mathématiques comporte quatre questions.
Pour chaque question, on obtient 0 point si la réponse est fausse ou 5 points si la réponse est bonne.
Une des questions consiste à trouver l'aire totale des six faces d'un cube dont le côté s'exprime par un nombre entier de mètres.
Une autre des questions est la suivante :
« Le prix d'une chemise, vendue avant les soldes à 20 €, baisse de 20 %. Quel est son nouveau prix ? »

Les réponses des élèves, sans unité, sont données par le tableau suivant :

	Réponse à la première question	Réponse à la deuxième question	Réponse à la troisième question	Réponse à la quatrième question
Alex	16	18	16	10
Carina	12	24	12	14
Jérôme	12	24	16	18
Lucille	8	18	14	10
Myriam	16	26	16	14
Nicole	8	24	18	18
Saïda	8	20	16	10
Yves	16	24	18	10

Les notes 0 et 20 ont toutes deux été attribuées.

Quelles sont les notes de chacun des élèves ?
Justifier les réponses données.

Exercice 3:

Partie A : Questions préliminaires

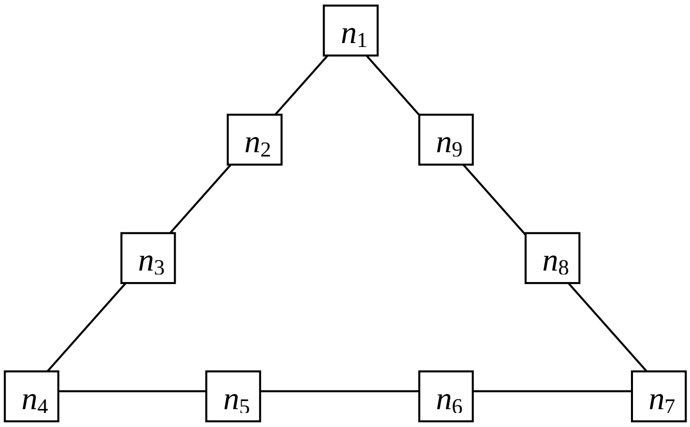
On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

1– Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?

2– Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques

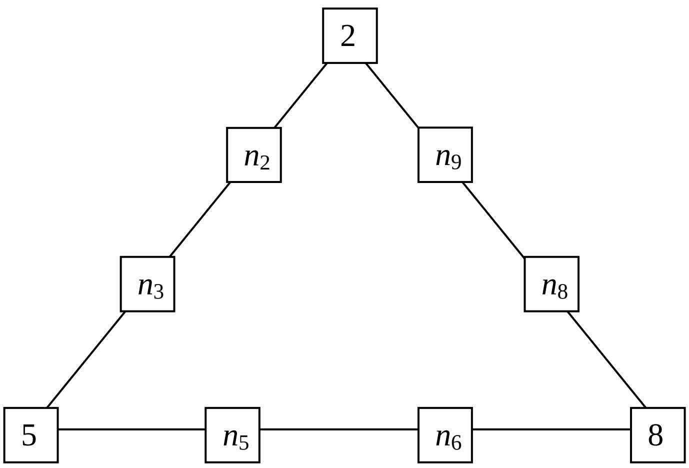
On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur *S*, on dit que le triangle est *S*-magique.
(C'est à dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \;=\; n_4 + n_5 + n_6 + n_7 \;=\; n_7 + n_8 + n_9 + n_1 \;=\; S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

1– Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S-magique de somme $S = 20$.



2– On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.
a. Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.
b. En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$
c. Donner la liste des couples (S, T) ainsi envisageables.

3– Proposer un triangle 17-magique.

4– Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.

5– **a.** Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.
b. Proposer un triangle 19-magique.

6– Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle $(40-S)$-magique.

7– Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?

Exercice 4:

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.

On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

1– Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$.

On pourra noter c la longueur du côté du losange.

Les questions suivantes sont indépendantes.

2– Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du coté du losange.

3– On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers.
Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?

4– À partir d'une feuille de longueur L, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ.
Exprimer, en fonction de L, la largeur l de la feuille de départ.

5– Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.