Illustrations de Nord

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : ES

Durée de l'épreuve : 3 heures – Coefficient : 7

SPECIALITE

Ce sujet comporte 6 pages, numérotées de 1 à 6

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats

L'usage d'une calculatrice est autorisé

Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Exercice 1 (*5 points*)

Commun à tous les candidats

Aucun détail des calculs statistiques effectués à la calculatrice n'est demandé dans cet exercice.

Dans un magasin, le nombre annuel de ventes d'un appareil électroménager, relevé pendant 6 années, est donné par le tableau suivant :

Année	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre d'appareils y_i	623	712	785	860	964	1073

1. a) Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points M_i $(x_i ; y_i)$ en prenant comme unités graphiques : 2 cm pour 1 rang en abscisses et 1 cm pour 50 appareils en ordonnées, en commençant à la graduation 600.

b) Calculer, en donnant les résultats arrondis à 10^{-2}, les coordonnées du point moyen G du nuage et placer ce point sur le graphique.

2. a) Calculer, en donnant les résultats arrondis à 10^{-2}, les coordonnées du point moyen G_1 du nuage formé par les points M_1, M_2 et M_3, puis les coordonnées du point moyen G_2 du nuage formé par les points M_4, M_5 et M_6.

b) Placer les points G_1 et G_2 sur le graphique et déterminer, avec des coefficients arrondis à 10^{-2}, une équation de la droite (G_1G_2).

c) En utilisant cette droite comme droite d'ajustement affine, déterminer le nombre d'appareils que l'on peut prévoir vendre en 2004.

3. On sait maintenant que le nombre d'appareils vendus en 2002 est de 1125.

a) Ajouter le point M_7 (7 ; 1125) sur le graphique précédent.

b) On considère alors le nouveau nuage formé des points M_i , $2 \leq i \leq 7$ (le nombre annuel de ventes de l'année 1996 n'est plus pris en compte).
Donner, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3}).

c) En utilisant cet ajustement, quel nombre d'appareils peut-on prévoir vendre en 2004 ?

Exercice 2 ***(5 points)***

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Soit le graphe G joint en annexe constitué des sommets A, B, C, D, E, F et G.

1. Quel est son ordre et le degré de chacun de ses sommets ?

2. Reproduire sur la copie et compléter le tableau des distances entre deux sommets de G :

Distance	A	B	C	D	E	F	G
A	X						
B	X	X					
C	X	X	X				
D	X	X	X	X			
E	X	X	X	X	X		
F	X	X	X	X	X	X	
G	X	X	X	X	X	X	X

En déduire le diamètre de ce graphe.

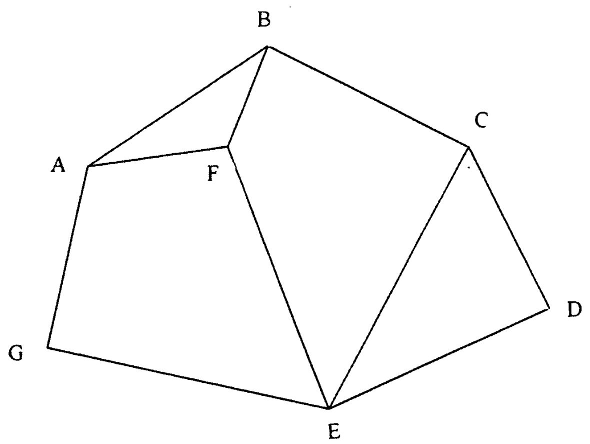
3. a) Donner un sous graphe complet d'ordre 3 de G.
Qu'en déduire pour le nombre chromatique de G ?

b) Proposer une coloration du graphe G et en déduire son nombre chromatique.

4. Donner la matrice M associée à G (vous numéroterez les lignes et les colonnes dans l'ordre alphabétique).

5. En utilisant la matrice M^2 donnée en **annexe 1**, déduire le nombre de chaînes de longueur 2 partant de A sans y revenir.

Annexe 1 exercice 2



$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problème ***(10 points)***

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur]-1 ; + ∞] par :

$$f(x) = \mathrm{a}\,x + \mathrm{b} + 3\ln(x+1)$$

où a et b désignent deux réels que l'on déterminera dans la question 2. On appelle C_f sa courbe représentative. La figure de l' **annexe** représente une partie de cette courbe donnée par une calculatrice graphique.

C_f vérifie les conditions suivantes : elle passe par le point A (0 ; 5) et elle admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

1. En utilisant les données de l'énoncé, que peut-on dire du sens de variation de f ?

2. Déterminer a et b.

Partie B

On suppose désormais que la fonction f est définie sur]-1 ; + ∞[par :

$$f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x+1)$$

1. a) Calculer la limite de f en –1. Interpréter graphiquement le résultat.

b) En admettant que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$, calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f. Dresser le tableau de variation. Préciser la valeur exacte du maximum de f.

3. Tracer C_f et les asymptotes éventuelles dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique : 2 cm)

4. a) Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que : $\alpha < 0 < \beta$ et $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α et de β.

c) En déduire le signe de $f(x)$ sur] –1 ; + ∞[.

5. Soit g la fonction définie sur] –1 ; + ∞[par :

$$g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x.$$

a) Calculer $g'(x)$.

b) En déduire l'expression de la primitive de f s'annulant pour x = 0.

Partie C

Une imprimerie a une capacité de production de 5 000 ouvrages par jour. Une étude a montré que le coût marginal peut être modélisé par $f(q)$ (en milliers d'euros) où q désigne la quantité d'ouvrages imprimés (en milliers). On rappelle que le coût marginal correspond à la dérivée du coût total.

1. a) Calculer $\int_0^5 f(q)\,dq$.

b) En déduire le coût total en euros de fabrication de 5 000 ouvrages.

2. L'imprimeur compte réaliser en deux jours une commande de 8 000 ouvrages. Il hésite entre deux possibilités :

5 000 ouvrages le premier jour puis 3 000 le second.

4 000 ouvrages pendant deux jours.

Quelle est l'option la plus rentable ?

Annexe 2

Courbe représentative de f