La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices conformes à la réglementation en vigueur et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

Exercice 1 (4 points)

Un sac contient 4 jetons numérotés respectivement -1, 0, 0, 1 et indiscernables au toucher.

On tire un jeton du sac, on note son numéro x et on le remet dans le sac ; on tire un second jeton, on note son numéro y et on le remet dans le sac ; puis on tire un troisième jeton, on note son numéro z et on le remet dans le sac.

Tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés.

A chaque tirage de trois jetons, on associe, dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le point M de coordonnées (x, y, z).

Sur le graphique joint en annexe page 5, sont placés les 27 points correspondant aux différentes positions possibles du point M.

Les coordonnées du point A sont $(1, -1, -1)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On note $\mathcal{C}$ le cube ABCDEFGH.

1) Démontrer que la probabilité que le point M soit en A est égale à $\frac{1}{64}$.

2) On note E_1 l'événement : « M appartient à l'axe des abscisses ».

   Démontrer que la probabilité de E_1 est égale à $\frac{1}{4}$.

3) Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par O et orthogonal au vecteur $\vec{n}(1, 1, 1)$.

   a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

   b) Tracer en couleur sur le graphique de la page 5, la section du plan $\mathcal{P}$ et du cube $\mathcal{C}$.
   (On ne demande pas de justification).

   c) On note E_2 l'événement : « M appartient à $\mathcal{P}$ ».
   Quelle est la probabilité de l'événement E_2 ?

4) On désigne par $\mathcal{B}$ la boule de centre O et de rayon 1,5 (c'est-à-dire l'ensemble des points M de l'espace tels que OM $\leq$ 1,5).
   On note E_3 l'événement : « M appartient à la boule $\mathcal{B}$ ».

   Déterminer la probabilité de l'événement E_3.

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$) (unité graphique 4 cm).
Soit I le point d'affixe 1.
On note C le cercle de diamètre [OI] et on nomme son centre Ω.

Partie I

On pose $a_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ i et on note A_0 son image.

1) Montrer que le point A_0 appartient au cercle C.

2) Soit B le point d'affixe b, avec $b = -1 + 2\mathrm{i}$, et B' le point d'affixe b' telle que $b' = a_0\, b$.

   a) Calculer b'.

   b) Démontrer que le triangle OBB' est rectangle en B'.

Partie II

Soit a un nombre complexe non nul et différent de 1, et A son image dans le plan complexe.

A tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = a\,z$.

1) On se propose de déterminer l'ensemble des points A tels que le triangle OMM' soit rectangle en M'.

   a) Interpréter géométriquement $arg\left(\frac{a-1}{a}\right)$.

   b) Montrer que $(\overrightarrow{\mathrm{M'O}}, \overrightarrow{\mathrm{M'M}}) = arg\left(\frac{a-1}{a}\right) + 2k\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$).

   c) En déduire que le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle C privé de O et de I.

2) Dans cette question, M est un point de l'axe des abscisses, différent de O.
On note x son affixe.

   On choisit a de manière que A soit un point de C différent de I et de O.

   Montrer que le point M' appartient à la droite (OA).

   En déduire que M' est le projeté orthogonal de M sur cette droite.

Problème (11 points)

On considère la fonction f définie sur **R** par : $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1) Etudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?
2) Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $e^{-x} \leq e^x$.
3) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b) Etudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.

4) On considère les fonctions g et h définies sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{e^x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{2e^x}$.

Sur l'annexe de la page 6 sont tracées, dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les courbes représentatives de g et h, notées respectivement Γ_1 et Γ_2.

   a) Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

   b) Que peut-on en déduire pour les courbes Γ, Γ_1 et Γ_2 ?

   Tracer Γ sur l'annexe de la page 6, en précisant sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie B

Soit (I_n) la suite définie sur **N** par : $I_n = \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$.

1) Justifier l'existence de I_n et donner une interprétation géométrique de I_n.

2) a) Démontrer, que pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$.

   b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

   c) Démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie C

Soit (J_n) la suite définie sur **N** par : $J_n = \int_0^n f(x)\mathrm{d}x$.

1) En utilisant l'encadrement obtenu dans la question A.4)a), démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2}\left(1 - e^{-n}\right) \leq J_n \leq 1 - e^{-n} \leq 1.$$

2) Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
   En déduire qu'elle converge.

3) On note L la limite de la suite (J_n) et on admet le théorème suivant :

« Si u, v et w sont trois suites convergentes de limites respectives a, b et c, et si, à partir d'un certain rang on a pour tout n, $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors $a \leq b \leq c$ ».

Donner un encadrement de L.

4) Soit u la fonction définie sur **R** par $u(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

On note v la primitive de u sur **R** telle que $v(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

On admet que la courbe représentative de v admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}$.

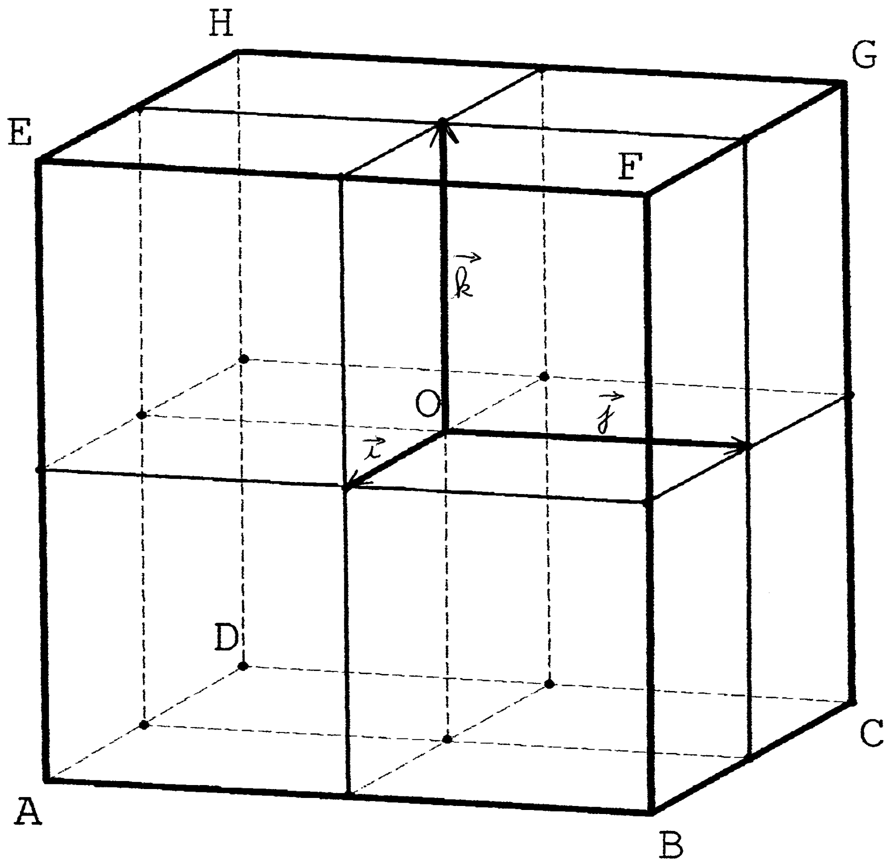
a) Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{e^x}{\left(e^x\right)^2 + 1}$.

b) Démontrer que, pour tout réel x, f est la dérivée de la fonction $x \mapsto v\left(e^x\right)$.

c) En déduire la valeur exacte de L.

Annexe de l'exercice 1

Cette page sera complétée et remise avec la copie



Annexe du problème

Cette page sera complétée et remise avec la copie

Courbes Γ_1 et Γ_2