Centres étrangers G 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : ES

Durée de l'épreuve : 3 heures – Coefficient : 5

OBLIGATOIRE

Ce sujet comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats

L'usage d'une calculatrice est autorisé

Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Exercice 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Aucun détail des calculs statistiques effectués à la calculatrice n'est demandé dans cet exercice. Sauf indication contraire, les résultats seront arrondis à 10^{-4}.

Le tableau suivant donne, en millions, la population mondiale de 1400 à 2000.

Année	Rang x_i de l'année	Population y_i
1400	0	374
1500	100	458
1600	200	580
1800	400	958
1900	500	1650
1950	550	2519
1970	570	3691
1980	580	4430
1990	590	5255
2000	600	6057

Source : Site internet de l'INED (Institut National des Etudes Démographiques)

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i ; y_i) en utilisant le repère semi-logarithmique joint en **annexe**.

2. On décide de faire un ajustement exponentiel, en ignorant les quatre premières données. On pose $z_i = \ln(y_i)$.

a) Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant par les valeurs z_i.

Rang x_i de l'année	500	550	570	580	590	600
$z_i = \ln(y_i)$						

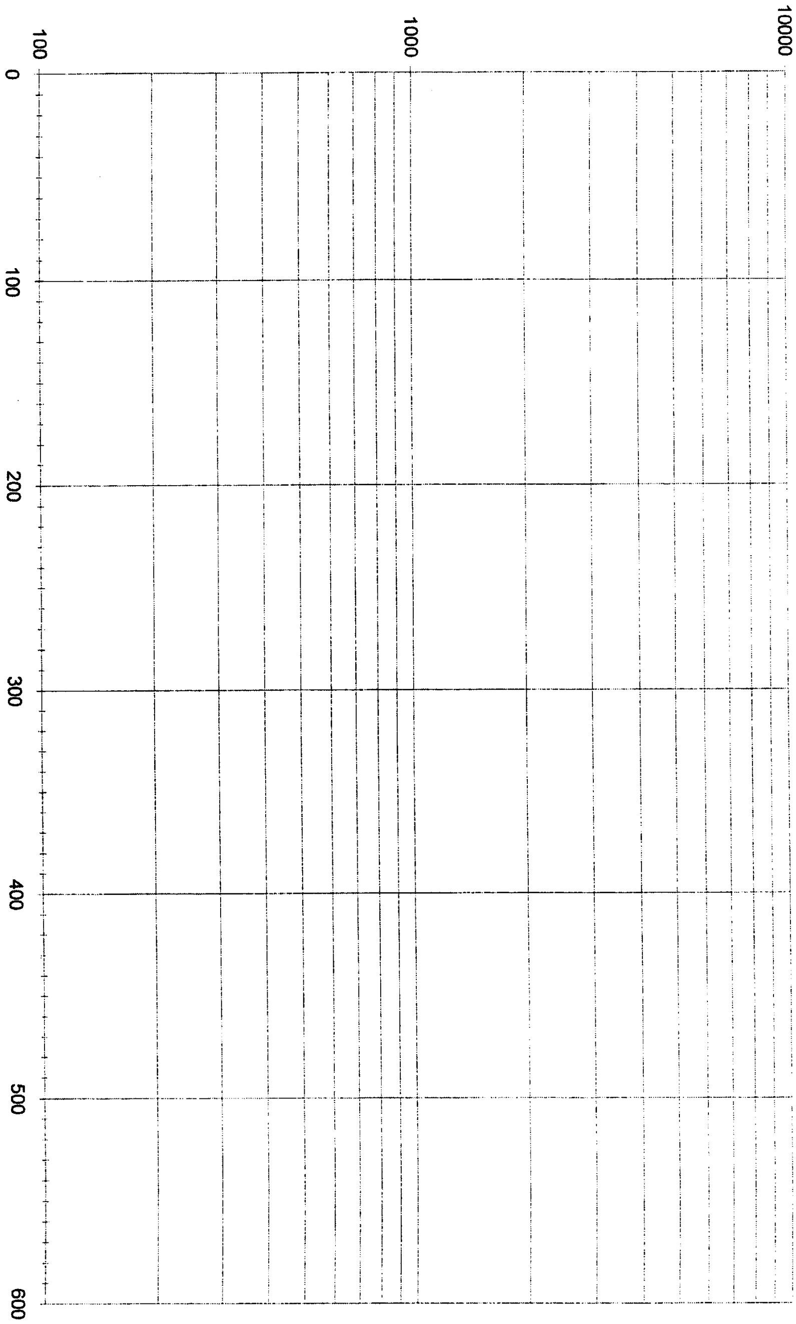
b) Donner une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés.

c) En déduire une relation entre y et x de la forme $y = \text{b} \times \text{a}^x$, où a et b sont deux réels à déterminer.

d) Utiliser cet ajustement pour estimer, au million près, la population mondiale en 2010.

ANNEXE de l'exercice 1

à compléter et à remettre avec la copie



Exercice 2 (6 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans une station service, la probabilité que n clients se présentent pendant une période de 10 minutes est donnée par le tableau suivant :

n	0	1	2
Probabilité	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$

1. Justifier que ce tableau définit une loi de probabilité. Calculer l'espérance de cette loi et interpréter le résultat.

On note C_n l'événement « n clients se présentent pendant une période de 10 minutes ».

Lorsqu'un client se présente, la probabilité qu'il prenne du gazole est $\frac{2}{5}$ et on note D_p l'événement « p clients ont pris du gazole pendant une période de 10 minutes ».

On rappelle que $P_B(A)$ désigne la probabilité de l'événement A sachant que B est réalisé.

2. On sait que deux clients se présentent pendant une période de 10 minutes.

a) Calculer la probabilité que ces deux clients prennent du gazole.

b) Montrer que la probabilité $P_{C_2}(D_1)$ qu'un seul de ces deux clients prenne du gazole est égale à $\frac{12}{25}$.

3. Les probabilités de l'événement D_p sachant que C_n est réalisé pour toutes les valeurs possibles de p et n, seront présentées dans le tableau suivant :

	C_0	C_1	C_2
D_0	1		
D_1	0		$\frac{12}{25}$
D_2	0	0	

a) Justifier les valeurs 0 présentes dans le tableau.

b) Justifier la valeur 1 correspondant à $P_{C_0}(D_0)$.

c) Reproduire le tableau sur la copie en complétant les valeurs manquantes *(On les donnera sous forme de fractions).*

4. Déterminer la probabilité de l'événement D_1.

Problème (10 points)

Commun à tous les candidats

Partie A : Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + 100\,e^{-0.2x}.$$

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
(unités graphiques: 1 cm pour 1 unité en abscisse ; 1 cm pour 10 unités en ordonnée)

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.

2. Montrer que la droite D d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C_f.

3. Calculer la dérivée f' et étudier les variations de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

4. Tracer C_f et D dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ pour x appartenant à $[1 ; 18]$.

5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 50$ sur l'intervalle $[1 ; 18]$.

6. Calculer la valeur exacte du nombre $M = \dfrac{1}{17}\displaystyle\int_1^{18} f(x)dx$, puis donner sa valeur arrondie à l'entier le plus proche.

Partie B : Modélisation d'un coût

Un artisan confiseur qui propose des chocolats « fait-maison » en fabrique de 1 à 18 kg par jour . Le coût moyen de fabrication d'un kilogramme de chocolat est exprimé en euros. Il est modélisé par la fonction f, étudiée dans la partie A, où x désigne la masse en kg de chocolats fabriqués $(1 \leq x \leq 18)$.

Dans la suite, on utilisera les résultats de la partie A.

1. **a)** Déterminer, à un euro près, le coût moyen de fabrication pour 6 kg fabriqués.
b) Quelle est la quantité à fabriquer pour que le coût moyen soit minimum ?
c) Quel est alors ce coût ?

2. L'artisan vend ses chocolats au prix de 50 € le kilogramme. Quelle quantité minimale doit-il fabriquer pour faire un bénéfice ?

3. Quelle est pour l'artisan la valeur moyenne du coût de fabrication d'un kilogramme de chocolats ?