

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

MATHÉMATIQUES

Série : ES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 heures — COEFFICIENT : 5

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Un pisciculteur possède un bassin qui contient 3 variétés de truites : communes, saumonées et arc-en-ciel. Il voudrait savoir s'il peut considérer que son bassin contient autant de truites de chaque variété. Pour cela il effectue, au hasard, 400 prélèvements d'une truite avec remise et obtient les résultats suivants :

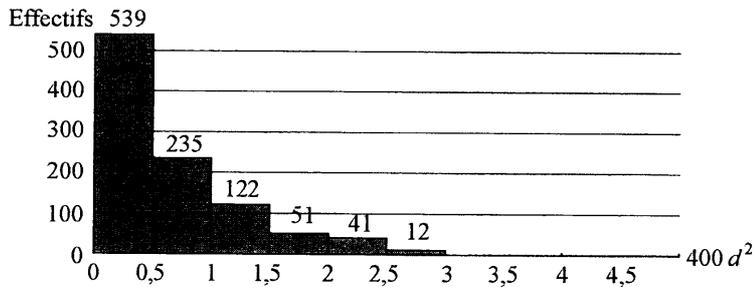
| Variétés | Commune | Saumonée | Arc-en-ciel |
|-----------|---------|----------|-------------|
| Effectifs | 146 | 118 | 136 |

1. a. Calculer les fréquences de prélèvement f_c d'une truite commune, f_s d'une truite saumonée et f_a d'une truite arc-en-ciel. On donnera les valeurs décimales exactes.

b. On pose $d^2 = \left(f_c - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(f_s - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(f_a - \frac{1}{3}\right)^2$.

Calculer $400 d^2$ arrondi à 10^{-2} ; on note $400 d_{obs}^2$ cette valeur.

2. À l'aide d'un ordinateur, le pisciculteur simule le prélèvement au hasard de 400 truites suivant la loi équirépartie. Il répète 1000 fois cette opération et calcule à chaque fois la valeur de $400 d^2$. Le diagramme à bandes ci-dessous représente la série des 1000 valeurs de $400 d^2$, obtenues par simulation.



Déterminer une valeur approchée à 0,5 près par défaut, du neuvième décile D9 de cette série.

3. En argumentant soigneusement la réponse dire si on peut affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 10 % que « le bassin contient autant de truites de chaque variété ».

4. On considère désormais que le bassin contient autant de truites de chaque variété.

Quand un client se présente, il prélève au hasard une truite du bassin.

Trois clients prélèvent chacun une truite. Le grand nombre de truites du bassin permet d'assimiler ces prélèvements à des tirages successifs avec remise.

Calculer la probabilité qu'un seul des trois clients prélève une truite commune.

Exercice 2 (5 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

A l'issue d'une compétition, des sportifs sont contrôlés par un comité antidopage qui doit se prononcer sur leur positivité ou négativité au dopage.

Or, d'une part certains produits dopants restent indétectables aux contrôles, d'autre part certains médicaments ont un effet de dopage inconnu du sportif; le comité prend donc sa décision avec un risque d'erreur.

On note :

- D l'événement « le sportif est dopé »,
- O l'événement « le sportif est déclaré positif ».
- E l'événement « le comité a commis une erreur ».

1. Dans cette question, on suppose que parmi les sportifs 50% ne sont pas dopés et que *la probabilité d'être déclaré positif est indépendante de l'état réel du sportif* (dopé ou non dopé).

Lors d'une étude sur des compétitions antérieures on a pu observer que ce comité déclarait positifs 20% des sportifs.

On choisit un sportif au hasard.

Calculer :

- la probabilité que le sportif soit non dopé et déclaré positif ;
- la probabilité que le sportif soit dopé et déclaré négatif ;
- la probabilité de l'événement E.

2. Dans cette question, on note p la fréquence des dopés parmi les sportifs contrôlés.

On suppose que *la probabilité d'être déclaré positif n'est pas la même selon que le sportif est réellement dopé ou non* :

- la probabilité qu'un sportif dopé soit déclaré positif est 0,9 ;
- la probabilité qu'un sportif non dopé soit déclaré positif est 0,1.

On choisit un sportif au hasard.

- a. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
- b. Calculer la probabilité de E.
- c. Calculer, en fonction de p , la probabilité que ce sportif soit déclaré positif.
- d. On s'intéresse à la probabilité qu'un sportif ayant été déclaré positif soit réellement dopé.

Montrer que cette probabilité, notée $f(p)$, est définie par : $f(p) = \frac{0,9p}{0,8p + 0,1}$

Résoudre l'inéquation $f(p) \geq 0,9$. Interpréter ce résultat.

Tournez la page S.V.P.

Problème (11 points)

Commun à tous les candidats

Ce problème a pour objectif d'étudier le prix d'équilibre entre l'offre et la demande d'un objet donné, dans une situation de concurrence parfaite.

Partie A : Étude de la demande

On suppose que le prix unitaire qu'acceptent de payer les consommateurs en fonction de la quantité x disponible sur le marché est modélisé par la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{50}{x^2 + x + 1}$.

Le prix unitaire $g(x)$ est exprimé en euros et la quantité x en millions d'objets.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. a. Calculer $g'(x)$.
b. Étudier les variations de g sur $[0 ; +\infty[$ et donner le tableau de variation.
3. Soit C_g la courbe représentative de g dans un repère orthogonal du plan.
Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_g au point d'abscisse nulle.
4. Tracer T et C_g (unités graphiques : 2 cm pour une unité en abscisses, 2 cm pour 10 unités en ordonnées).

Partie B : Étude de l'offre

Les producteurs acceptent de fabriquer une quantité x exprimée en millions d'objets si le prix unitaire de l'objet atteint une valeur minimale. On suppose que ce prix minimal (qui dépend de la quantité x) est modélisé par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = 3 e^{0,26x}$. Le prix unitaire $f(x)$ est exprimé en euros.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.
3. Tracer C_f dans le même repère que C_g .

Partie C : Recherche du prix d'équilibre

Dans un marché à concurrence parfaite, la « loi de l'offre et de la demande » tend à dégager un prix d'équilibre p_0 pour lequel l'offre des producteurs est égale à la demande des consommateurs. On appelle q_0 la quantité associée à p_0 .

1. Déterminer graphiquement un encadrement entre deux entiers consécutifs d'une part du prix d'équilibre p_0 et d'autre part de la quantité associée q_0 .
2. On pose $h(x) = f(x) - g(x)$ pour tout x de $[0 ; +\infty[$.
a. Dédire des parties A et B le sens de variation de h sur $[0 ; +\infty[$.
b. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique q_0 sur $[2 ; 3]$.
c. Donner à l'aide de la calculatrice une valeur arrondie à 10^{-2} de q_0 .
3. Calculer une valeur approchée du prix d'équilibre p_0 , on donnera le résultat arrondi à 10^{-2} près.

Partie D : Surplus des producteurs

On appelle surplus des producteurs le gain supplémentaire que réalisent les producteurs en vendant au prix p_0 . Il est obtenu à partir de l'expression : $S_p = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} f(x) dx$. Il est exprimé en millions d'euros.

1. Donner une interprétation graphique de S_p (on interprétera $p_0 q_0$ comme l'aire d'un rectangle).
2. *a.* Calculer S_p en fonction de p_0 et q_0 .
b. Déterminer une valeur arrondie à 10^{-1} de S_p exprimée en millions d'euros.