Inde

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5,
et 1 page annexe non numérotée à rendre avec la copie.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Exercice 1 *(4 points)*

Commun à tous les candidats

Un pisciculteur possède un bassin qui contient 3 variétés de truites : communes, saumonées et arc-en-ciel. Il voudrait savoir s'il peut considérer que son bassin contient autant de truites de chaque variété. Pour cela il effectue, au hasard, 400 prélèvements d'une truite avec remise et obtient les résultats suivants :

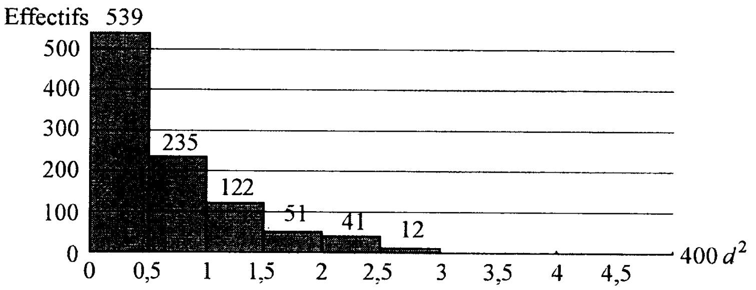
Variétés	Commune	Saumonée	Arc-en-ciel
Effectifs	146	118	136

1. *a.* Calculer les fréquences de prélèvement f_c d'une truite commune, f_s d'une truite saumonée et f_a d'une truite arc-en-ciel. On donnera les valeurs décimales exactes.

   b. On pose $d^2 = \left(f_c - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(f_s - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(f_a - \frac{1}{3}\right)^2$.

   Calculer 400 d^2 arrondi à 10^{-2} ; on note 400 d^2_{obs} cette valeur.

2. À l'aide d'un ordinateur, le pisciculteur simule le prélèvement au hasard de 400 truites suivant la loi équirépartie. Il répète 1000 fois cette opération et calcule à chaque fois la valeur de 400 d^2. Le diagramme à bandes ci-dessous représente la série des 1000 valeurs de 400 d^2, obtenues par simulation.



   Déterminer une valeur approchée à 0,5 près par défaut, du neuvième décile D9 de cette série.

3. En argumentant soigneusement la réponse dire si on peut affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 10 % que « le bassin contient autant de truites de chaque variété ».

4. On considère désormais que le bassin contient autant de truites de chaque variété.
   Quand un client se présente, il prélève au hasard une truite du bassin.
   Trois clients prélèvent chacun une truite. Le grand nombre de truites du bassin permet d'assimiler ces prélèvements à des tirages successifs avec remise.
   Calculer la probabilité qu'un seul des trois clients prélève une truite commune.

Exercice 2 *(5 points)*

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un consommateur veut acquérir des cassettes et des livres dans des quantités respectives x et y. Il cherche à rendre maximale sa satisfaction, en déterminant au mieux x et y, compte tenu de son budget. On note z son degré de satisfaction, il est fonction des quantités x et y de cassettes et de livres achetés : on pose $z = f(x, y)$ où f désigne la fonction d'utilité de ce consommateur. Les quantités x et y peuvent varier de 0 à 10.

1. La fonction f a pour représentation graphique, dans un repère orthogonal, la surface S (figure I de l'annexe). Cette surface est représentée en vue de dessus sur la figure II de cette même annexe.

   a. Déterminer graphiquement une valeur approchée du degré de satisfaction maximal qui peut être obtenu et les quantités x et y correspondantes.

   b. Déterminer deux possibilités d'achats (x_1, y_1) et (x_2, y_2) qui donnent un degré de satisfaction égal à 30.
   Comment appelle-t-on l'ensemble des points $\mathrm{M}(x, y, z)$ de S tels que $z = 30$?

2. Dans la suite de l'exercice, on suppose que la fonction d'utilité a pour expression :
   $f(x, y) = (x + 1)(y + 2)$.
   Une cassette coûte 6 euros et un livre 3 euros. Le consommateur est disposé à dépenser exactement 24 euros.

   a. Montrer que les contraintes financières peuvent se traduire par l'équation : $2x + y - 8 = 0$.

   b. Quelle est la nature de l'ensemble P des points de l'espace, dont les coordonnées sont les solutions de cette équation ?
   Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels de P avec les trois axes du repère. Représenter la trace de l'ensemble P sur la figure II.

3. *a.* Exprimer $f(x, y)$ en fonction de la seule variable x, en tenant compte de la contrainte financière. On notera $g(x)$ l'expression obtenue.

   b. Étudier les variations de la fonction g ainsi définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$, en précisant pour quelle valeur de x l'extremum est atteint.

   c. Pour quelles quantités x et y l'achat est-il le plus satisfaisant ? Indiquer le degré de satisfaction correspondant.

4. Le résultat de la question 3. *c.* correspond-il à celui de la question 1.*a.* ? Justifier la réponse.

Tournez la page S.V.P.

Problème *(11 points)*

Commun à tous les candidats

Ce problème a pour objectif d'étudier le prix d'équilibre entre l'offre et la demande d'un objet donné, dans une situation de concurrence parfaite.

Partie A : Étude de la demande

On suppose que le prix unitaire qu'acceptent de payer les consommateurs en fonction de la quantité x disponible sur le marché est modélisé par la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{50}{x^2+x+1}$.
Le prix unitaire $g(x)$ est exprimé en euros et la quantité x en millions d'objets.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. *a.* Calculer $g'(x)$.
   b. Étudier les variations de g sur $[0\,;+\infty[$ et donner le tableau de variation.

3. Soit $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal du plan.
   Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse nulle.

4. Tracer T et $\mathcal{C}_g$ (unités graphiques : 2 cm pour une unité en abscisses, 2 cm pour 10 unités en ordonnées).

Partie B : Étude de l'offre

Les producteurs acceptent de fabriquer une quantité x exprimée en millions d'objets si le prix unitaire de l'objet atteint une valeur minimale. On suppose que ce prix minimal (qui dépend de la quantité x) est modélisé par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=3\,\mathrm{e}^{0,26x}$. Le prix unitaire $f(x)$ est exprimé en euros.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

3. Tracer $\mathcal{C}_f$ dans le même repère que $\mathcal{C}_g$.

Partie C : Recherche du prix d'équilibre

Dans un marché à concurrence parfaite, la « loi de l'offre et de la demande» tend à dégager un prix d'équilibre p_0 pour lequel l'offre des producteurs est égale à la demande des consommateurs. On appelle q_0 la quantité associée à p_0.

1. Déterminer graphiquement un encadrement entre deux entiers consécutifs d'une part du prix d'équilibre p_0 et d'autre part de la quantité associée q_0 .

2. On pose $h(x)=f(x)-g(x)$ pour tout x de $[0\,;+\infty[$.
   a. Déduire des parties A et B le sens de variation de h sur $[0\,;+\infty[$.
   b. Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique q_0 sur $[2\,;\,3]$.
   c. Donner à l'aide de la calculatrice une valeur arrondie à 10^{-2} de q_0.

3. Calculer une valeur approchée du prix d'équilibre p_0, on donnera le résultat arrondi à 10^{-2} près.

Partie D : Surplus des producteurs

On appelle surplus des producteurs le gain supplémentaire que réalisent les producteurs en vendant au prix p_0. Il est obtenu à partir de l'expression : $S_p = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} f(x)\,dx$. Il est exprimé en millions d'euros.

1. Donner une interprétation graphique de S_p (on interprétera $p_0 q_0$ comme l'aire d'un rectangle).

2. *a*. Calculer S_p en fonction de p_0 et q_0.

   b. Déterminer une valeur arrondie à 10^{-1} de S_p exprimée en millions d'euros.

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

MATHÉMATIQUES
SPÉCIALITÉ

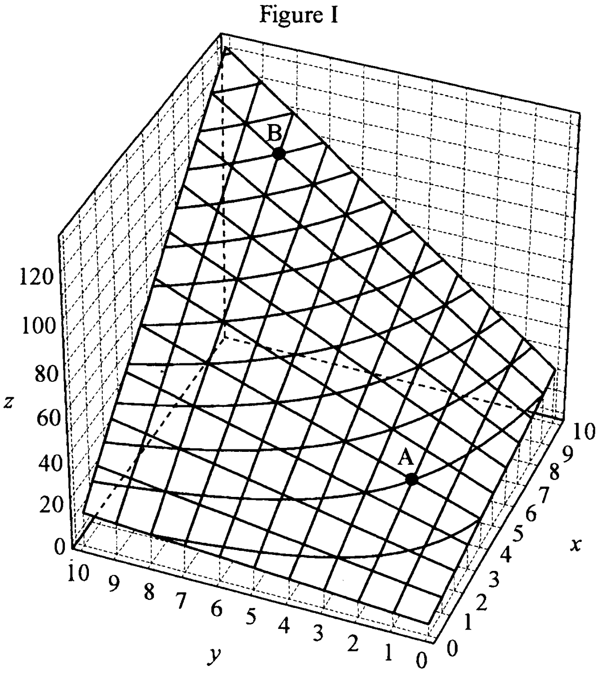
Série : **ES**

PAGE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE.

Tournez la page S.V.P.

Annexe à rendre avec la copie

Figure I



On lit sur ce graphique que le point A a pour coordonnées (4 ;2 ;20) et le point B a pour coordonnées (9 ;8 ;100).

Figure II