Liban

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : ES

Durée de l'épreuve : 3 heures – Coefficient : 7

SPECIALITE

Ce sujet comporte 6 pages, numérotées de 1 à 6

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats

L'usage d'une calculatrice est autorisé

Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Exercice 1 *(5 points)*

Commun à tous les candidats

Aucun détail des calculs statistiques effectués à la calculatrice n'est demandé dans cet exercice.

Partie A

Le tableau suivant donne l'évolution de la production annuelle de turbots dans une ferme aquacole.

Année	1997	1998	1999	2000	2001	2002
rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
production y_i	650	760	1190	1620	2600	5050

1. Construire le nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i) dans un repère orthogonal R :

- sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 2 cm pour une année.
- sur l'axe des ordonnées, on placera 600 à l'origine et on choisira 1 cm pour 200 turbots.

2. D'après l'allure du nuage quel type d'ajustement peut-on envisager ?

Partie B

*Les résultats des questions **1.**, **2.** et **3.** seront arrondis à 10^{-3}.*

1. On pose $z_i = \ln(y_i)$.

Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant :

Année	1997	1998	1999	2000	2001	2002
rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
z_i						

2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points associé à la série (x_i, z_i).

3. a) En utilisant la calculatrice, déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement affine de z en x.

b) Exprimer y en fonction de x.

4. En utilisant la question précédente, répondre aux deux questions suivantes :

a) Quelle production peut-on prévoir en 2005 ?

b) A partir de quelle année peut-on prévoir que la production annuelle dépassera 30 000 turbots ?

Exercice 2 *(5 points)*

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un théâtre propose deux types d'abonnements pour une année: un abonnement A donnant droit à six spectacles ou un abonnement B donnant droit à trois spectacles.

On considère un groupe de 2500 personnes qui s'abonnent tous les ans.

n étant un entier naturel, on note :

- a_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement A l'année n;
- b_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement B l'année n;
- P_n la matrice $[a_n \ \ b_n]$ traduisant l'état probabiliste à l'année n.

Tous les ans 85 % des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55 % des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent ce type d'abonnement l'année suivante. Les autres personnes changent d'abonnement.

1. On suppose que, l'année zéro, 1500 personnes ont choisi l'abonnement A et 1000 l'abonnement B. Déterminer l'état initial $P_0 = [a_0 \ \ b_0]$.

2. a) Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.

b) Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.

c) En déduire le nombre d'abonnés pour chaque type d'abonnement l'année un.

3. Soit $P = [x \ \ y]$ l'état stable, où x et y sont deux nombres réels positifs tels que $x + y = 1$.

a) Justifier que x et y vérifient l'équation $x = 0{,}85\,x + 0{,}45\,y$.

b) Déterminer x et y.

c) En déduire la limite de la suite (a_n) quand n tend vers plus l'infini.

d) Interpréter le résultat précédent en terme de nombre d'abonnements de type A.

Problème (*10 points*)

Commun à tous les candidats

La commercialisation d'un article sur un marché suit une fonction d'offre notée f et une fonction demande notée g.
Elles sont définies sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{e^{x}-1}{8} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{120}{e^{x}+15},$$

où x représente la quantité exprimée en milliers d'articles, $f(x)$ représente le prix de vente exprimé en euros pour une quantité x offerte, et $g(x)$ représente le prix de vente exprimé en euros pour une quantité x demandée.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).
On désigne respectivement par C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans ce repère.
La courbe C_f est donnée dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ sur l'annexe jointe au sujet.

L'annexe sera complétée et jointe à la copie.

Partie A

Etude de la fonction demande.
Détermination de la quantité échangée et du prix d'équilibre du marché.

1) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
En déduire l'existence d'une asymptote que l'on précisera.

2) g' désigne la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

Justifier que $g'(x)=-\dfrac{120\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x}+15\right)^{2}}$.

3) Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $[0\ ;+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de g sur $[0\ ;+\infty[$.

4) a) Reproduire sur la copie et compléter le tableau de valeurs *(arrondir les résultats à 10^{-1})*.

x	0	0,5	1	2	3	3,5	4	5	6	7
$g(x)$										

b) Calculer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_g au point d'abscisse 0.

c) Tracer la courbe représentative C_g et la tangente T sur l'annexe jointe au sujet.

5) On admet que sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = g(x)$ a une solution unique notée q, appelée quantité échangée. On note $p = f(q) = g(q)$ le prix d'équilibre correspondant.

a) Faire apparaître sur le graphique les valeurs p et q.

b) Vérifier que $q = ln(25)$.
En déduire la valeur de p.

Partie B

Calcul du « surplus du consommateur ».

1) D est le domaine du plan défini par $\{M(x;y) / 0 \le x \le q \text{ et } p \le y \le g(x)\}$, où p et q sont les valeurs déterminées dans la partie A-5.
Hachurer ce domaine D sur l'annexe jointe au sujet.

2) Soit G la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $G(x) = 8\,[x - \ln(e^x + 15)]$.
Démontrer que G est une primitive de g sur $[0 ; +\infty[$.

3) On appelle « surplus du consommateur » (en milliers d'euros) le nombre :

$$R = \int_0^q g(x)\mathrm{d}x - pq$$

a) Justifier que R représente, en unité d'aire, l'aire du domaine D.

b) Calculer la valeur exacte de R.

c) Donner une valeur approchée de R à l'euro près.

Annexe

à compléter et à remettre avec la copie