

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

MATHÉMATIQUES

Série : ES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 heures — COEFFICIENT : 5

*Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4,  
et une page annexe à rendre avec la copie.*

*Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.*

*L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.*

*Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.  
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour  
une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.*

Tournez la page S.V.P.

3MAOEPO3

*Polynésie - session de remplacement*

**Exercice 1 (5 points)**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

Le tableau suivant donne le taux de prélèvement obligatoire en France exprimé en points de PIB (produit intérieur brut).

Année	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Rang de l'année $x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Taux $t_i$	42,7	42,9	43,4	43,7	44,8	44,9	44,9	45,7	44,7	44,2

Source : Budget

Le nuage de points associé à la série  $(x_i ; t_i)$  présentant des écarts à peu près réguliers de part et d'autre de la droite d'ajustement, on effectue un lissage par la méthode des moyennes mobiles d'ordre 3 en remplaçant le taux  $t_i$  par la moyenne  $z_i = \frac{t_{i-1} + t_i + t_{i+1}}{3}$ . Par exemple :  $z_1 = \frac{t_0 + t_1 + t_2}{3} = 43$ .

1. Compléter après l'avoir reproduit le tableau suivant (les valeurs seront arrondies à 0,1) et compléter le nuage de points sur la figure donnée en annexe.

Rang de l'année $x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8
Moyenne $z_i$	43	43,3		44,5			45,1	44,9

2. Écrire une équation de la droite d'ajustement affine D de  $z$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 0,01). Tracer D sur la figure fournie en annexe.

**Partie B**

L'allure du nuage permet d'envisager un autre ajustement correspondant à la parabole  $\mathcal{P}$  d'équation

$$y = -0,065x^2 + 0,91x + 42.$$

1. Tracer la parabole  $\mathcal{P}$  sur la figure fournie en annexe en utilisant le tableau suivant. On prendra 45,2 comme valeur approchée de l'ordonnée du sommet de  $\mathcal{P}$ .

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_i$	42,8	43,6	44,1	44,6	44,9	45,1	45,2	45,1

2. On se propose d'étudier pour lequel des deux modèles on obtient le meilleur ajustement. Pour cela, on calcule les sommes des carrés des écarts entre les valeurs  $z_i$  et les valeurs données par le modèle.

On appelle  $S_{\mathcal{P}}$  et  $S_D$  les sommes associées respectivement à la parabole  $\mathcal{P}$  et à la droite D.

- a. Compléter après l'avoir reproduit le tableau suivant. Les valeurs sont données à 0,01 près.

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$(z_i - y_i)^2$	0,04	0,09		0,01			0,01	0,04

b. Calculer  $S_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^8 (z_i - y_i)^2$

- c. Pour le modèle correspondant à la droite D on donne  $S_D = 0,8$ .  
Quel est le modèle qui donne le meilleur ajustement ?

3. En utilisant le modèle associé à la parabole  $\mathcal{P}$  :

- a. Calculer  $y_9$  (valeur arrondie à  $10^{-2}$ ).  
b. Cette valeur étant une estimation de la moyenne mobile  $z_9$ , en déduire une estimation  $t_{10}$  du taux de prélèvement obligatoire en 2002.

### Exercice 2 (5 points)

#### Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

La DG XXIV de la Commission Européenne, dans son rapport du 8 juillet 1999, détaille ainsi l'évaluation du test W pour le diagnostic de l'ESB ( Encéphalopathie Spongiforme Bovine) :

- la proportion des réactions POSITIVES au test effectué sur des tissus nerveux provenant d'animaux infectés est égale à 70 % ;
- la proportion des réactions NÉGATIVES au test effectué sur des tissus nerveux provenant d'animaux non infectés est égale à 90 %.

On envisage un dépistage dans un cheptel bovin. On choisit dans le cheptel un animal au hasard. On désigne par  $M$  l'événement « l'animal est malade » et par  $T$  l'événement « le test est positif ».

#### Partie A

On estime à 0,07 la fréquence d'animaux malades dans le cheptel.

1. Construire un arbre pondéré représentant cette situation et donner les valeurs manquantes.
2. En utilisant cet arbre, calculer  $P(M \cap T)$  puis  $P(T)$ .
3. En déduire la probabilité que l'animal soit malade sachant que le test est positif. On donnera la valeur arrondie à  $10^{-3}$ .

#### Partie B

On estime maintenant à  $x$  la fréquence d'animaux malades dans le cheptel.

1. Construire un arbre pondéré représentant cette situation.
2. En utilisant cet arbre, calculer  $P(M \cap T)$  puis  $P(T)$ .
3. On note  $P_T(M)$  la probabilité que l'animal soit malade sachant que le test est positif.

$$\text{Montrer que } P_T(M) = \frac{7x}{6x+1}.$$

4. Soit  $f$  la fonction numérique de la variable  $x$  définie sur  $[0 ; 1]$  par  $f(x) = \frac{7x}{6x+1}$ .

Résoudre sur  $[0 ; 1]$  l'inéquation  $f(x) \geq 0,9$ .

Interpréter le résultat.

**Tournez la page S.V.P.**

**Problème (10 points)**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

Le tableau de variation donné ci-dessous est celui de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = 2e^x - x - 2.$$

$x$	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	-	0	+
Variation de $g$	$+\infty$	$\searrow$ $\ln 2 - 1$	$\nearrow$ $+\infty$

- Calculer  $g(0)$ .
  - Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une autre solution  $\alpha$  appartenant à l'intervalle  $[-2; -1]$ .  
Dans la suite, on prendra  $-1,6$  comme valeur arrondie de  $\alpha$ .
- Déterminer le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Partie B**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{2x} - xe^x - e^x$ .

- Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
  - Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  (on pourra mettre  $e^{2x}$  en facteur dans l'expression  $f(x)$ ).
- Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'$  et  $g$  ont le même signe.
  - En déduire le sens de variation de  $f$ .
  - Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- Tracer la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de  $f$  dans un repère orthogonal (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées).

**Partie C**

- Soit  $H$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $H(x) = e^x(x-1)$ .  
Montrer que  $H$  est une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $h$  définie par  $h(x) = xe^x$ .
- En déduire une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f$ .
- Calculer l'aire du domaine limité par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ . On donnera la valeur exacte en unités d'aire, puis la valeur arrondie à  $10^{-2}$  en  $\text{cm}^2$ .

**Partie D**

Dans une entreprise, le coût de fabrication, en centaines d'euros, de  $x$  dizaines d'objets est modélisé par la fonction  $C$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $C(x) = f(x)$ .

- Calculer le coût de fabrication de 10 objets au centime d'euro près.
- Résoudre graphiquement l'équation  $C(x) = 6$ .  
Donner une valeur approchée à  $10^{-1}$  près par défaut du résultat.
  - En déduire le nombre maximal d'objets qu'on peut fabriquer pour un coût de 600 € ?

**BACCALAURÉAT GÉNÉRAL**

SESSION 2003

---

**MATHÉMATIQUES  
OBLIGATOIRE**

Série : ES

---

***PAGE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE.***

**Tournez la page S.V.P.**

**3MAOEP03**

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 1

