BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4, et une page annexe à rendre avec la copie.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Tournez la page S.V.P.

Polynésie - session de remplacement.

Exercice 1 *(5 points)*

Commun à tous les candidats

Partie A

Le tableau suivant donne le taux de prélèvement obligatoire en France exprimé en points de PIB (produit intérieur brut).

Année	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Taux t_i	42,7	42,9	43,4	43,7	44,8	44,9	44,9	45,7	44,7	44,2

Source : Budget

Le nuage de points associé à la série $(x_i\ ;\ t_i)$ présentant des écarts à peu près réguliers de part et d'autre de la droite d'ajustement, on effectue un lissage par la méthode des moyennes mobiles d'ordre 3 en remplaçant le taux t_i par la moyenne $z_i = \dfrac{t_{i-1}+t_i+t_{i+1}}{3}$. Par exemple : $z_1 = \dfrac{t_0+t_1+t_2}{3} = 43$.

1. Compléter après l'avoir reproduit le tableau suivant (les valeurs seront arrondies à 0,1) et compléter le nuage de points sur la figure donnée en annexe.

Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Moyenne z_i	43	43,3		44,5			45,1	44,9

2. Écrire une équation de la droite d'ajustement affine D de z en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 0,01). Tracer D sur la figure fournie en annexe.

Partie B

L'allure du nuage permet d'envisager un autre ajustement correspondant à la parabole $\mathcal{P}$ d'équation

$$y = -\,0{,}065\,x^2 + 0{,}91\,x + 42.$$

1. Tracer la parabole $\mathcal{P}$ sur la figure fournie en annexe en utilisant le tableau suivant. On prendra 45,2 comme valeur approchée de l'ordonnée du sommet de $\mathcal{P}$.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	42,8	43,6	44,1	44,6	44,9	45,1	45,2	45,1

2. On se propose d'étudier pour lequel des deux modèles on obtient le meilleur ajustement. Pour cela, on calcule les sommes des carrés des écarts entre les valeurs z_i et les valeurs données par le modèle.
   On appelle $S_{\mathcal{P}}$ et S_D les sommes associées respectivement à la parabole $\mathcal{P}$ et à la droite D.
   a. Compléter après l'avoir reproduit le tableau suivant. Les valeurs sont données à 0,01 près.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$(z_i - y_i)^2$	0,04	0,09		0,01			0,01	0,04

   b. Calculer $S_{\mathcal{P}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{8}(z_i - y_i)^2$
   c. Pour le modèle correspondant à la droite D on donne $S_D = 0{,}8$.
   Quel est le modèle qui donne le meilleur ajustement ?

3. En utilisant le modèle associé à la parabole $\mathcal{P}$:
   a. Calculer y_9 (valeur arrondie à 10^{-2}).
   b. Cette valeur étant une estimation de la moyenne mobile z_9, en déduire une estimation t_{10} du taux de prélèvement obligatoire en 2002.

Exercice 2 *(5 points)*

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une revue professionnelle permet à ses clients de s'abonner par Minitel.
Le nombre de clients s'abonnant par Minitel était de 20 000 en l'an 2000 et de 19 000 en l'an 2001.
On constate qu'en 2002,

- le nombre de nouveaux clients s'abonnant par Minitel est égal à 10 % des clients abonnés par Minitel en 2001
- le nombre de clients ne s'abonnant plus par Minitel est égal à 14,25 % des clients abonnés par Minitel en 2000

On note u_n le nombre de clients (exprimé en milliers de clients) s'abonnant par Minitel pour l'année $(2000 + n)$. On a donc $u_0 = 20$ et $u_1 = 19$.

1. Calculer u_2.

On suppose que, les années suivantes, l'évolution du nombre d'abonnés par Minitel suit le modèle précédent.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, la relation de récurrence permettant de calculer u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et de u_n est : $u_{n+2} = 1{,}1\ u_{n+1} - 0{,}1425\ u_n$.

3. En utilisant cette relation, calculer u_3 et u_4 (résultats arrondis à 10^{-2}).

4. Dans la suite de l'exercice, on admettra que la suite (u_n) est la suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $u_0 = 20$.
   a. Calculer, à l'unité près, le nombre de clients qui s'abonneront par Minitel en 2010.
   b. Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter le résultat obtenu.

5. Calculer en quelle année le nombre de clients s'abonnant par Minitel sera pour la première fois inférieur à 10 000.

6. Calculer, à l'unité près, le nombre total d'abonnements effectués par Minitel de l'an 2000 à l'an 2014.

Tournez la page S.V.P.

Problème *(10 points)*

Commun à tous les candidats

Partie A

Le tableau de variation donné ci-dessous est celui de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2e^x - x - 2.$$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de g	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2 - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

1. *a.* Calculer $g(0)$.
   b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une autre solution α appartenant à l'intervalle $[-2\,;-1]$.
   Dans la suite, on prendra $-1{,}6$ comme valeur arrondie de α.

2. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - xe^x - e^x$.

1. *a.* Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre e^{2x} en facteur dans l'expression $f(x)$).

2. *a.* Calculer $f'(x)$ et montrer que f' et g ont le même signe.
   b. En déduire le sens de variation de f.
   c. Dresser le tableau de variation de f.

3. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans un repère orthogonal (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie C

1. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{H}(x) = e^x(x-1)$.
   Montrer que H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = x\,e^x$.
2. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
3. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. On donnera la valeur exacte en unités d'aire, puis la valeur arrondie à 10^{-2} en cm².

Partie D

Dans une entreprise, le coût de fabrication, en centaines d'euros, de x dizaines d'objets est modélisé par la fonction C définie sur $[0\,; +\infty[$ par $\mathrm{C}(x) = f(x)$.

1. Calculer le coût de fabrication de 10 objets au centime d'euro près.
2. *a.* Résoudre graphiquement l'équation $\mathrm{C}(x) = 6$.
   Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut du résultat.
   b. En déduire le nombre maximal d'objets qu'on peut fabriquer pour un coût de 600 € ?

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

MATHÉMATIQUES
SPÉCIALITÉ

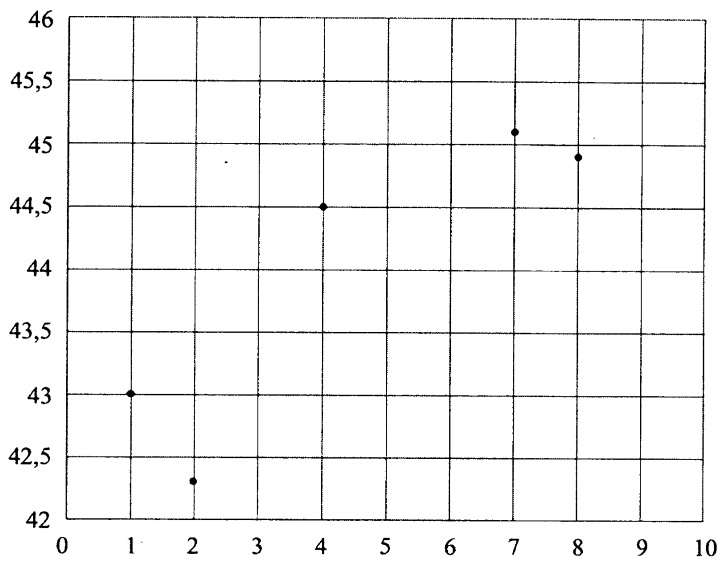
Série : **ES**

PAGE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE.

Tournez la page S.V.P.

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 1



3MASEPO3