BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

MATHÉMATIQUES

Série : S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5, et une page annexe à rendre avec la copie.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Tournez la page S.V.P.

Réunion.

Exercice 1 *(6 points)*

Commun à tous les candidats

Cet exercice comporte 3 questions indépendantes.
Une question comporte 4 affirmations repérées par les lettres *a., b., c., d.*
Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.
Vous inscrirez en toutes lettres « VRAI » ou « FAUX » dans la case correspondante du tableau donné en annexe à rendre avec la copie.
Aucune justification n'est demandée pour cet exercice.

1. Une urne contient 75 boules blanches et 25 boules noires. L'expérience . élémentaire consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue n tirages indépendants et sans remise, n désignant un entier supérieur à 10. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées.	*a.* X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{4}$. *b.* $P(X=0)=\frac{1}{2^{2n}}$ *c.* $P(X<5)=1-P(X>5)$ *d.* $E(X)=0{,}75\,n$
2. Une maladie atteint 1 % d'une population donnée. Un test de dépistage de cette maladie a les caractéristiques suivantes : • Chez les individus malades, 99 % des tests sont positifs et 1 % négatifs. • Chez les individus non malades, 98 % des tests sont négatifs (les autres étant positifs). Un individu est choisi au hasard dans cette population et on lui applique le test. On note M l'événement : « l'individu est malade » et T l'événement : « le test pratiqué est positif ».	*a.* $P_M(T)+P_{\overline{M}}(T)=1{,}01$ *b.* $P_M(T)+P_{\overline{M}}(T)=P(T)$ *c.* $P(T)=2{,}97.10^{-2}$ *d.* Sachant que le test est positif, il y a deux chances sur trois pour que l'individu testé ne soit pas malade.
3. La durée d'attente en secondes à la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,01. Alors :	*a.* La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(t)=e^{-0{,}01t}$. *b.* Pour tout réel t positif, $P(Y\leq t)=1-e^{-0{,}01t}$ *c.* La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est, à 0,01 près, égale à 0,16. *d.* Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute.

Exercice 1 *(6 points)*

Commun à tous les candidats

Cet exercice comporte 3 questions indépendantes.
Une question comporte 4 affirmations repérées par les lettres *a., b., c., d.*
Aucune justification n'est demandée pour cet exercice.
Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.
Vous inscrirez en toutes lettres « VRAI » ou « FAUX » dans la case correspondante du tableau donné en annexe à rendre avec la copie.

1. Une urne contient 75 boules blanches et 25 boules noires. L'expérience élémentaire consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue n tirages indépendants et sans remise, n désignant un entier supérieur à 10. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées.	*a.* X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{4}$. *b.* $P(X=0)=\frac{1}{2^{2n}}$ *c.* $P(X<5)=1-P(X>5)$ *d.* $E(X)=0{,}75\,n$
2. Une maladie atteint 1 % d'une population donnée. Un test de dépistage de cette maladie a les caractéristiques suivantes : • Chez les individus malades, 99 % des tests sont positifs et 1 % négatifs. • Chez les individus non malades, 98 % des tests sont négatifs (les autres étant positifs). Un individu est choisi au hasard dans cette population et on lui applique le test. On note M l'événement : « l'individu est malade » et T l'événement : « le test pratiqué est positif ».	*a.* $P_M(T)+P_{\overline{M}}(T)=1{,}01$ *b.* $P_M(T)+P_{\overline{M}}(T)=P(T)$ *c.* $P(T)=2{,}97.10^{-2}$ *d.* Sachant que le test est positif, il y a deux chances sur trois pour que l'individu testé ne soit pas malade.
3. La durée d'attente en secondes à la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,01. Alors :	*a.* La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(t)=e^{-0{,}01t}$. *b.* Pour tout réel t positif, $P(Y\le t)=1-e^{-0{,}01t}$ *c.* La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est, à 0,01 près, égale à 0,16. *d.* Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute.

Exercice 2 *(5 points)*

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.

Le nombre a désigne un réel strictement positif.

On considère le point M de la demi-droite [AE) défini par : $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{a}\overrightarrow{AE}$.

1. Déterminer le volume du tétraèdre ABDM en fonction de a.

2. Soit K le barycentre du système de points pondérés $\{(M,a^2)\ ;\ (B,1)\ ;\ (D,1)\}$.

   a. Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BM}$ et de $\overrightarrow{BD}$.

   b. Calculer $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AD}$ puis en déduire l'égalité : $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{MD} = 0$.

   c. Démontrer l'égalité : $\overrightarrow{DK}.\overrightarrow{MB} = 0$.

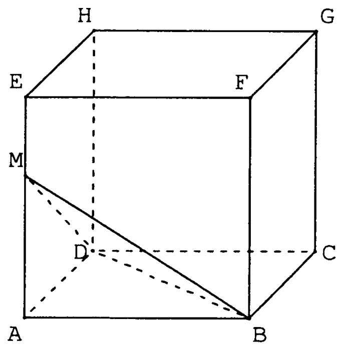
   d. Démontrer que K est l'orthocentre du triangle BDM.

3. Démontrer les égalités $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MB} = 0$ et $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MD} = 0$. Qu'en déduit-on pour la droite (AK) ?

4. *a.* Montrer que le triangle BDM est isocèle et que son aire est égale à $\dfrac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$ unité d'aire.

   b. Déterminer le réel a tel que l'aire du triangle BDM soit égale à 1 unité d'aire.

   Déterminer la distance AK dans ce cas.



Tournez la page S.V.P.

Problème *(9 points)*

Commun à tous les candidats

On considère l'équation différentielle (E) : $y - y' = \frac{e^x}{x^2}$ et on cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur] 0 ; +∞ [.

1. *a.* Démontrer que la fonction u définie sur] 0 ; +∞ [par $u(x) = \frac{e^x}{x}$ est solution de (E).

   b. Démontrer qu'une fonction v définie sur] 0 ; +∞ [est solution de (E) si et seulement si la fonction $v - u$, définie sur] 0 ; +∞ [, est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0$.

   c. En déduire toutes les solutions définies sur] 0 ; +∞ [de l'équation (E).

2. Pour tout réel k négatif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur] 0 ; +∞ [par

$$f_k(x) = \frac{kx+1}{x}\, e^x$$

   a. Déterminer les limites de f_k en 0 et en +∞.

   b. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle] 0 ; +∞ [et déterminer le nombre de solutions sur] 0 ; +∞ [de l'équation $f_k'(x) = 0$.

3. On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
   On a tracé sur le graphique ci-joint les courbes C_{-1}, $C_{-0,25}$, $C_{-0,15}$ et C_0.

   En utilisant la deuxième question, reconnaître chaque courbe (les réponses doivent être justifiées).

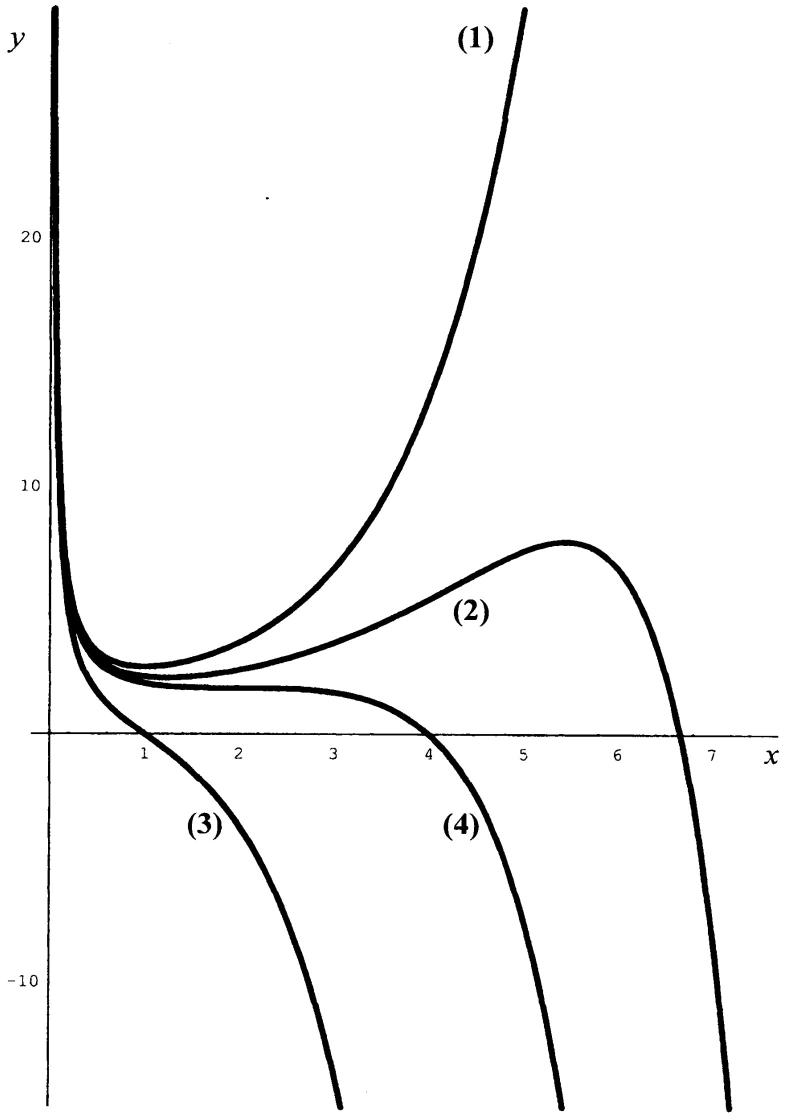
4. Pour tout réel a strictement positif, on pose $A(a) = \int_a^{a+1} \frac{e^x}{x}\, dx$.

   a. Interpréter géométriquement $A(a)$.

   b. On désigne par F une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ sur] 0 ; +∞ [.
   En remarquant que $A(a) = F(a+1) - F(a)$ étudier le sens de variation de la fonction qui à tout réel a élément de] 0 ; +∞ [associe le réel $A(a)$.

   c. On veut découper dans le plan une bande verticale de largeur une unité de telle sorte que l'aire située dans cette bande entre les courbes C_0 et (Ox) soit minimale.
   Comment doit on procéder ?

Annexe du problème



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

MATHÉMATIQUES
OBLIGATOIRE

Série : **S**

PAGE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE.

Tournez la page S.V.P.

Document à rendre avec la copie

Annexe relative à l'exercice 1

réponses / questions	*a.*	*b.*	*c.*	*d.*
1.				
2.				
3.				