

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

MATHÉMATIQUES

Série : S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures. – COEFFICIENT : 9

*Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5,
et 1 page annexe non numérotée à rendre avec la copie.*

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice comporte 3 questions indépendantes.

Une question comporte 4 affirmations repérées par les lettres *a*, *b*, *c*, *d*.

Aucune justification n'est demandée pour cet exercice.

Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.

Vous inscrirez en toutes lettres « VRAI » ou « FAUX » dans la case correspondante du tableau donné en annexe à rendre avec la copie.

<p>1. Une urne contient 75 boules blanches et 25 boules noires. L'expérience élémentaire consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue n tirages indépendants et sans remise, n désignant un entier supérieur à 10. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées.</p>	<p><i>a.</i> X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{4}$.</p> <p><i>b.</i> $P(X=0) = \frac{1}{2^{2n}}$</p> <p><i>c.</i> $P(X < 5) = 1 - P(X > 5)$</p> <p><i>d.</i> $E(X) = 0,75 n$</p>
<p>2. Une maladie atteint 1 % d'une population donnée. Un test de dépistage de cette maladie a les caractéristiques suivantes :</p> <ul style="list-style-type: none">• Chez les individus malades, 99 % des tests sont positifs et 1 % négatifs.• Chez les individus non malades, 98 % des tests sont négatifs (les autres étant positifs). <p>Un individu est choisi au hasard dans cette population et on lui applique le test. On note M l'événement : « l'individu est malade » et T l'événement : « le test pratiqué est positif ».</p>	<p><i>a.</i> $P_M(T) + P_{\bar{M}}(T) = 1,01$</p> <p><i>b.</i> $P_M(T) + P_{\bar{M}}(T) = P(T)$</p> <p><i>c.</i> $P(T) = 2,97 \cdot 10^{-2}$</p> <p><i>d.</i> Sachant que le test est positif, il y a deux chances sur trois pour que l'individu testé ne soit pas malade.</p>
<p>3. La durée d'attente en secondes à la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,01. Alors :</p>	<p><i>a.</i> La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(t) = e^{-0,01t}$.</p> <p><i>b.</i> Pour tout réel t positif, $P(Y \leq t) = 1 - e^{-0,01t}$</p> <p><i>c.</i> La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est, à 0,01 près, égale à 0,16.</p> <p><i>d.</i> Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute.</p>

Exercice 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = -(\sqrt{3} + i)z - 1 + i(1 + \sqrt{3})$.

1. Montrer que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i . En déterminer le rapport et l'angle.

2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$.

Calculer ΩM_0 et donner une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M_0})$.

3. On considère la suite de points $(M_n)_{n \geq 0}$ définie pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n .

a. Placer les points $\Omega, M_0, M_1, M_2, M_3$ et M_4 .

b. Montrer par récurrence, pour tout entier naturel n , l'égalité : $z_n - i = 2^n e^{i \frac{7n\pi}{6}} (z_0 - i)$.

c. Pour tout entier naturel n , calculer ΩM_n puis déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega M_n \geq 10^2$.

4. a. On considère l'équation (E) : $7x - 12y = 1$ où x et y sont deux entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(-5, -3)$ est solution, résoudre l'équation (E).

b. Soit Δ l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que $\text{Im}(z) = 1$ et $\text{Re}(z) \geq 0$. Caractériser géométriquement Δ et le représenter.

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par le vecteur \vec{u} . Préciser son plus petit élément.

Tournez la page S.V.P.

Problème (9 points)

Commun à tous les candidats

On considère l'équation différentielle (E) : $y - y' = \frac{e^x}{x^2}$ et on cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $] 0 ; +\infty [$.

1. a. Démontrer que la fonction u définie sur $] 0 ; +\infty [$ par $u(x) = \frac{e^x}{x}$ est solution de (E).
b. Démontrer qu'une fonction v définie sur $] 0 ; +\infty [$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $v - u$, définie sur $] 0 ; +\infty [$, est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0$.
c. En déduire toutes les solutions définies sur $] 0 ; +\infty [$ de l'équation (E).

2. Pour tout réel k négatif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $] 0 ; +\infty [$ par

$$f_k(x) = \frac{kx+1}{x} e^x$$

- a. Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.
b. Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $] 0 ; +\infty [$ et déterminer le nombre de solutions sur $] 0 ; +\infty [$ de l'équation $f'_k(x) = 0$.

3. On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On a tracé sur le graphique ci-joint les courbes C_{-1} , $C_{-0,25}$, $C_{-0,15}$ et C_0 .

En utilisant la deuxième question, reconnaître chaque courbe (les réponses doivent être justifiées).

4. Pour tout réel a strictement positif, on pose $A(a) = \int_a^{a+1} \frac{e^x}{x} dx$.

a. Interpréter géométriquement $A(a)$.

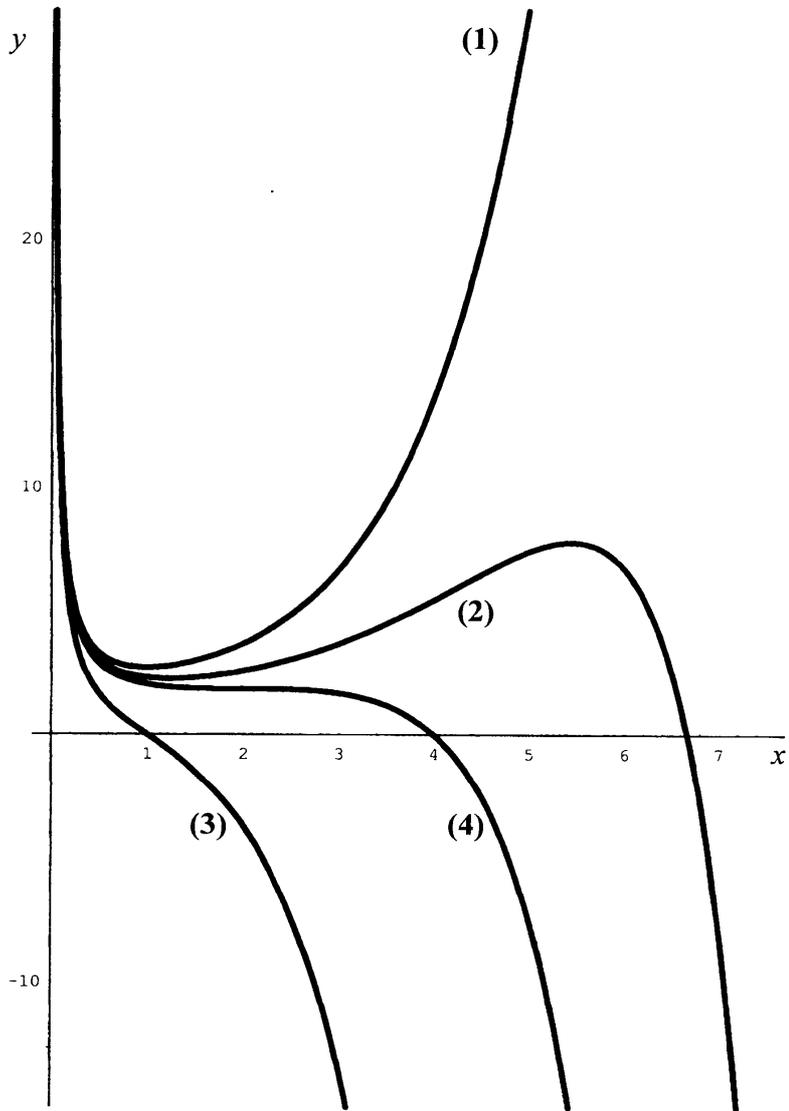
b. On désigne par F une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ sur $] 0 ; +\infty [$.

En remarquant que $A(a) = F(a+1) - F(a)$ étudier le sens de variation de la fonction qui à tout réel a élément de $] 0 ; +\infty [$ associe le réel $A(a)$.

c. On veut découper dans le plan une bande verticale de largeur une unité de telle sorte que l'aire située dans cette bande entre les courbes C_0 et (Ox) soit minimale.

Comment doit on procéder ?

Annexe du problème



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

**MATHÉMATIQUES
SPÉCIALITÉ**

Série : S

PAGE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE.

Tournez la page S.V.P.

3MASSLR1

Document à rendre avec la copie

Annexe relative à l'exercice 1

réponses questions	<i>a.</i>	<i>b.</i>	<i>c.</i>	<i>d.</i>
1.				
2.				
3.				