BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2006

MATHÉMATIQUES

SÉRIE ES

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 7**

SPÉCIALITÉ

Ce sujet comporte 6 pages
dont 1 feuille : **Annexe à rendre avec la copie.**

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

La feuille Annexe (document réponse) et la feuille de papier millimétré sont à rendre avec la copie.

Note importante :

Dès que le sujet de l'épreuve vous est remis, assurez-vous qu'il est complet, en vérifiant le nombre de pages en votre possession.

Si le sujet est incomplet, demandez en immédiatement un nouvel exemplaire aux surveillants d'épreuve.

EXERCICE 1 (sur 5 points)

Commun à tous les candidats

Questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question , une seule des trois réponses est exacte. On demande d'indiquer la réponse exacte en cochant sans justification la grille réponse jointe en annexe. *Pour chaque question, une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse donne 0 point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à 0.*

Questions		**Réponses**		
Q1	Si $a \in]0\,;1[$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x$ est égale à :	0	$+\infty$	$-\infty$
Q2	Une primitive sur **R** de la fonction $x \mapsto xe^{x^2}$ est :	$x \mapsto e^{x^2}$	$x \mapsto 2e^{x^2}$	$x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2}$
Q3	La dérivée sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto x\ln x$ est :	$x \mapsto 1/x$	$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto \ln x + 1$
Q4	$e^{-2\ln 5}$ est égal à :	$\frac{1}{25}$	-25	$\frac{5}{2}$
Q5	L'équation $e^x = \frac{16}{e^x}$ admet sur **R** :	Aucune solution	Une solution	Deux solutions
Q6	L'ensemble des solutions de l'inéquation $x\ln(0,2) - 5 \geq 0$ est :	$\left[\frac{5}{\ln(0,2)};0\right[$	$\left]-\infty;\frac{5}{\ln(0,2)}\right]$	$\left[\frac{5}{\ln(0,2)};+\infty\right[$
Dans les questions 7, 8, 9 et 10 : A et B sont deux événements d'un univers tels que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,3$ et $P(A \cap B) = 0,2$.				
Q7	$P(A \cup B) =$	0,1	0,5	0,7
Q8	$P(A \cap \overline{B}) =$	0,1	0,2	0,4
Q9	$P(\overline{A \cap B}) =$	0,3	0,5	0,8
Q10	$P_A(B) =$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

EXERCICE 2 (sur 5 points)

Pour les candidats suivant l'enseignement de spécialité

Dans une entreprise, lors d'un mouvement social, le personnel est amené à se prononcer chaque jour sur l'opportunité ou non du déclenchement d'une grève.

Le premier jour, 15% du personnel souhaite le déclenchement d'une grève.

A partir de ce jour-là :

- parmi ceux qui souhaitent le déclenchement d'une grève un certain jour, 35% changent d'avis le lendemain.
- parmi ceux qui ne souhaitent pas le déclenchement d'une grève un certain jour, 33% changent d'avis le lendemain.

On note :

- g_n la probabilité qu'un membre du personnel souhaite le déclenchement d'une grève le jour n,
- t_n la probabilité qu'un membre du personnel ne souhaite pas le déclenchement d'une grève le jour n,
- $P_n = (g_n \quad t_n)$, la matrice qui traduit l'état probabiliste au n-ième jour.

1. Déterminer l'état initial P_1.

2. a. Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.

b. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.

3. Calculer le pourcentage de personnes favorables à la grève le 3^e jour.

4. Soit $P = (x \quad y)$ l'état probabiliste stable (*on rappelle que* $x + y = 1$).

a. Montrer que x et y vérifient l'équation $x = 0,65\,x + 0,33\,y$.

b. Déterminer x et y *(on arrondira les résultats à 10^{-3} près).*

c. Interpréter le résultat.

EXERCICE 3 (sur 5 points)

Commun à tous les candidats

Tous les résultats numériques seront arrondis à l'unité près sauf indication contraire.

Une machine est achetée 3000 euros.
Le prix de revente y, exprimé en euros, est donné en fonction du nombre x d'années d'utilisation par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	3000	2400	1920	1536	1229	983

A) Ajustement affine

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i ; y_i) dans un repère orthogonal du plan. *Les unités graphiques seront de 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et de 1 cm pour 200 euros sur l'axe des ordonnées.*

2. Calculer le pourcentage de dépréciation du prix de revente après les trois premières années d'utilisation.

3. *Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés.*
Donner une équation de la droite de régression $\mathcal{D}$ de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
Représenter la droite $\mathcal{D}$ dans le repère précédent.

B) Ajustement non affine

On pose $z = \ln(y)$ et on admet qu'une équation de la droite de régression de z en x est donnée par : $z = -0{,}22\,x + 8{,}01$.

1. Déterminer une expression de y en fonction de x de la forme $y = \mathrm{A}^x \times \mathrm{B}$ où A est un réel arrondi au centième près et B est un réel arrondi à l'unité près.

2. En admettant que $y = 0{,}80^x \times 3011$, déterminer après combien d'années d'utilisation le prix de revente devient inférieur ou égal à 500 euros.

C) Comparaison des ajustements

Après 6 années d'utilisation le prix de revente d'une machine est de 780 euros.
Des deux ajustements précédents, quel est celui qui semble le mieux estimer le prix de revente après 6 années d'utilisation ? On argumentera la réponse.

EXERCICE 4 (sur 5 points)

Commun à tous les candidats

Soit une fonction r définie sur l'intervalle [0 ;12] par $r(x) = (900x)e^{-0,1(x-2)}$.

A) Etude d'une fonction f

1. On considère la fonction f définie sur]0 ;12] par $f(x) = \ln[\,r(x)]$.
Démontrer que $f(x) = \ln(900) + \ln x - 0,1(x-2)$.

2. On note f' la fonction dérivée de f, démontrer que $f'(x) = \dfrac{10-x}{10x}$.

3. Etudier le signe de $f'(x)$ pour tout x de]0 ;12] puis dresser le tableau de variation de f sur]0 ;12].

4. On désigne par r' la fonction dérivée de r, exprimer f' en fonction de r' et de r puis justifier que $r'(x)$ et $f'(x)$ ont le même signe pour tout x de]0 ;12].

5. En déduire les variations de r sur]0 ;12].

6. Déterminer pour quelle valeur x_0 la fonction r atteint un maximum et calculer x_0 arrondi à l'unité près.

B) Calcul de la valeur moyenne.

1. Démontrer que la fonction R définie par $R(x) = -9000(x+10)e^{-0,1(x-2)}$ est une primitive de la fonction r sur [0 ;12].

2. Calculer la valeur moyenne r_m de la fonction r sur [0 ;12] définie par $r_m = \dfrac{1}{12}\displaystyle\int_0^{12} r(x)\,dx$.
On donnera d'abord la valeur exacte et ensuite une valeur arrondie à 10^{-2} près.

<u>Annexe</u> – Document réponse à rendre avec la copie

EXERCICE 1 : ***Questionnaire à choix multiples.***

Questions		Réponses		
Q1	Si $a \in]0\,;1[$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x$ est égale à :	0	$+\infty$	$-\infty$
		☐	☐	☐
Q2	Une primitive sur **R** de la fonction $x \mapsto xe^{x^2}$ est :	$x \mapsto e^{x^2}$	$x \mapsto 2\,e^{x^2}$	$x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2}$
		☐	☐	☐
Q3	La dérivée sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto x\ln x$ est :	$x \mapsto 1/x$	$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto \ln x + 1$
		☐	☐	☐
Q4	$e^{-2\ln 5}$ est égal à :	$\frac{1}{25}$	-25	$\frac{5}{2}$
		☐	☐	☐
Q5	L'équation $e^x = \frac{16}{e^x}$ admet sur **R** :	Aucune solution	Une solution	Deux solutions
		☐	☐	☐
Q6	L'ensemble des solutions de l'inéquation $x\ln(0,2) - 5 \geq 0$ est :	$\left[\frac{5}{\ln(0,2)};0\right[$	$\left]-\infty;\frac{5}{\ln(0,2)}\right]$	$\left[\frac{5}{\ln(0,2)};+\infty\right[$
		☐	☐	☐
Dans les questions 7, 8, 9 et 10 : A et B sont deux événements d'un univers tels que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,3$ et $P(A \cap B) = 0,2$.				
Q7	$P(A \cup B) =$	$0,1$	$0,5$	$0,7$
		☐	☐	☐
Q8	$P(A \cap \overline{B}) =$	$0,1$	$0,2$	$0,4$
		☐	☐	☐
Q9	$P(\overline{A \cap B}) =$	$0,3$	$0,5$	$0,8$
		☐	☐	☐
Q10	$P_A(B) =$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
		☐	☐	☐