

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2006

MATHÉMATIQUES

SÉRIE ES

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 5

OBLIGATOIRE

Ce sujet comporte 5 pages.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet nécessite une feuille de papier millimétré.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

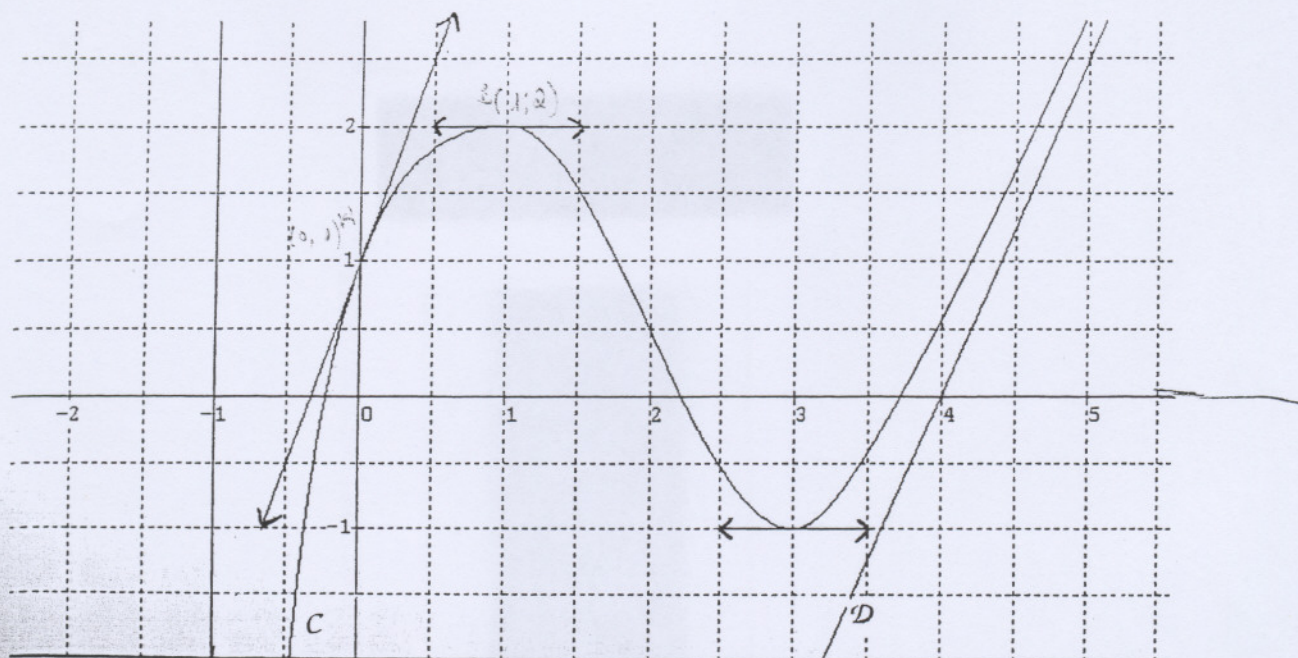
Note importante :

Dès que le sujet de l'épreuve vous est remis, assurez-vous qu'il est complet, en vérifiant le nombre de pages en votre possession.

Si le sujet est incomplet, demandez en immédiatement un nouvel exemplaire aux surveillants d'épreuve.

EXERCICE 1 Commun à tous les candidats (sur 5 points)

La courbe C donnée ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie et dérivable sur $]-1; +\infty[$. On sait que la fonction f est croissante sur $]-1; 1]$ et sur $[3; +\infty[$ et que la droite \mathcal{D} est asymptote à C en $+\infty$.



I. Étude graphique de la fonction f

Chaque question comporte trois affirmations, une seule des trois est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier l'affirmation exacte sans justifier votre choix. Une bonne réponse rapporte 0,5 point ; une mauvaise réponse retire 0,25 point ; l'absence de réponse donne 0 point.

- Une asymptote à C est la droite d'équation :
 - $y = -1$
 - $x = 1$
 - $x = -1$.
- La droite \mathcal{D} a pour équation :
 - $y = \frac{5}{2}x - 10$
 - $y = \frac{5}{2}x - 9$
 - $y = 3x - 10$.
- Le nombre dérivé de f en 0 est
 - 1
 - 3
 - -3.
- Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $]-1; +\infty[$ est :
 - 2
 - 1
 - 3.

II. Étude d'une fonction g

On note g la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $g(x) = \exp(f(x))$.

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$.
- Étudier les variations de g sur $]-1; +\infty[$ et en dresser le tableau de variation.
- Déterminer $g'(1)$ et $g'(0)$.
- Déterminer, avec la précision permise par le graphique, l'ensemble des solutions sur $]-1; +\infty[$ de l'inéquation $g(x) \leq e^2$.

EXERCICE 2 (sur 5 points)

Pour les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité

La question 6 peut être traitée indépendamment des 5 autres.

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

Un pépiniériste conditionne un mélange de 400 bulbes de fleurs composé de trois variétés :

- 100 bulbes d'Anémones
- 180 bulbes de Bégonias
- 120 bulbes de Crocus.

On conviendra qu'un bulbe germe s'il donne naissance à une plante qui fleurit. Après avoir planté tous les bulbes et observé leur floraison, on constate que :

- 83% des bulbes germent.
- 50% des bulbes d'Anémones germent.
- 90% des bulbes de Bégonias germent.

On note les événements suivants :

- A : « le bulbe planté est un bulbe d'Anémone. »
- B : « le bulbe planté est un bulbe de Bégonias. »
- C : « le bulbe planté est un bulbe de Crocus. »
- G : « le bulbe planté germe. »

1. Donner les probabilités conditionnelles $P_A(G)$, $P_B(G)$ et la probabilité $P(G)$.
2. Quelle est la probabilité qu'un bulbe planté soit un bulbe d'Anémone qui germe ?
3. Quelle est la probabilité que le bulbe planté soit un bulbe qui germe ou soit un bulbe de Bégonias ?
4. a. Calculer la probabilité conditionnelle $P_C(G)$.
b. Que peut-on en déduire ?
5. On considère un bulbe ayant germé. Quelle est la probabilité que ce soit un bulbe de Crocus ?
6. On considère à présent que le pépiniériste dispose d'un très grand nombre de bulbes et que la probabilité qu'un bulbe germe est de 0,83. Il prélève au hasard successivement trois bulbes de ce stock. Quelle est la probabilité qu'au moins un des trois bulbes choisis germe ?

Remarques :

1. On pourra s'aider d'un arbre de probabilité.

2. On rappelle la formule des probabilités totales :

si A_1, A_2, \dots, A_n forment une partition de l'univers, alors la probabilité d'un événement quelconque E est donnée par : $p(E) = p(A_1 \cap E) + p(A_2 \cap E) + \dots + p(A_n \cap E)$.

EXERCICE 3 (sur 5 points)

Commun à tous les candidats

Sauf indication contraire, on arrondira les résultats à 10^{-2} près.

Le **taux de pénétration** du téléphone mobile dans la population française indique le pourcentage de personnes équipées d'un téléphone mobile par rapport à la population totale.

Le tableau ci-dessous donne, entre 1998 et 2004, l'évolution de la population française et du taux de pénétration.

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6	7
Population française en millions	60,05	60,32	60,67	61,04	61,43	61,80	62,18
Taux de pénétration y_i	18,7	34,2	48,9	60,6	62,8	67,5	71,6

(Source : site de l'INSEE)

- Calculer le nombre, en millions, de personnes équipées d'un téléphone mobile en 1999 et en 2004.
 - Entre ces deux années quel est le pourcentage d'augmentation du taux de pénétration ?
- Placer dans un repère orthogonal le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$: les unités graphiques sont de 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et de 1 cm pour 10 % sur l'axe des ordonnées.
- L'allure du nuage suggère de chercher un ajustement de y en x de la forme :
 $y = a \ln(x) + b$ où a et b sont des réels. On pose pour cela $z = \ln(x)$.
 - Recopier et compléter le tableau

x_i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	0						
Taux de pénétration y_i	18,7	34,2	48,9	60,6	62,8	67,5	71,6

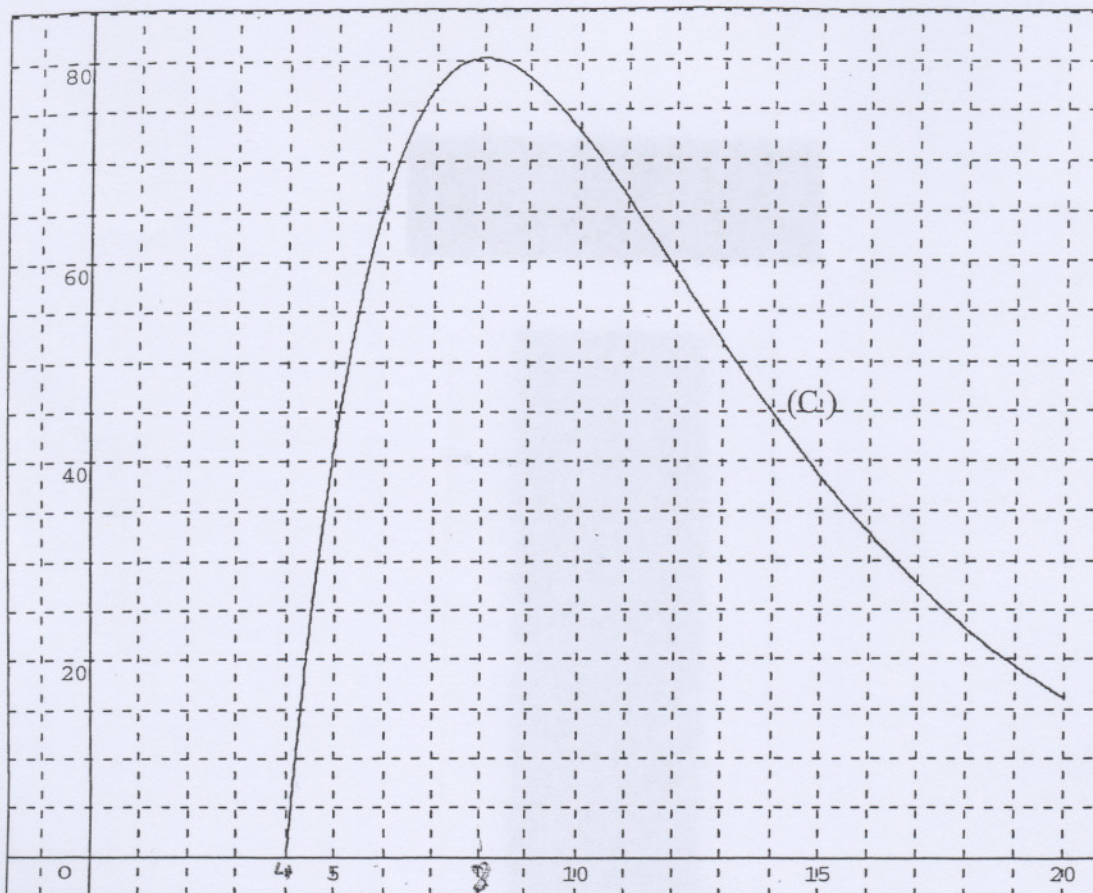
- En déterminant avec la calculatrice une équation de la droite de régression de y en z , obtenue par la méthode des moindres carrés, donner la valeur approchée décimale à 10^{-2} près par défaut des coefficients a et b .
- En admettant que cet ajustement reste fiable à moyen terme :
 - Déterminer le taux de pénétration en 2006 que l'on peut alors envisager.
 - À partir de quelle année peut-on penser que le taux de pénétration dépassera 85 % ?

EXERCICE 4 (sur 5 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[4 ; 20]$ par $f(x) = (x - 4) e^{-0,25x + 5}$.

La courbe (C) ci-dessous représente cette fonction dans un repère orthogonal.



Partie A :

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[4 ; 20]$, $f'(x) = (-0,25x + 2) e^{-0,25x + 5}$.
2. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[4 ; 20]$.
3. a. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = -4x e^{-0,25x + 5}$ est une primitive de f sur l'intervalle $[4 ; 20]$.
b. Calculer l'intégrale $\int_4^{20} f(x) dx$.

Partie B :

Une entreprise commercialise des centrales d'aspiration.

Le prix de revient d'une centrale est de 400 €.

On suppose que le nombre d'acheteurs d'une centrale est donné par $N = e^{-0,25x + 5}$, où x est le prix de vente d'une centrale exprimé en centaines d'euros.

1. Montrer que la fonction f de la partie A donne le bénéfice réalisé par l'entreprise, en centaines d'euros.
2. A quel prix l'entreprise doit-elle vendre une centrale pour réaliser un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice maximal à l'euro près ? Donner un interprétation graphique de ces résultats.
3. Calculer la valeur moyenne du bénéfice pour $x \in [4 ; 20]$. On donnera le résultat à l'euro près.