SUJET SORTI

Session 2006

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

GÉNIE MÉCANIQUE

Option B : systèmes motorisés
Option C : structures métalliques
Option D : bois et matériaux associés
Option E : matériaux souples

GÉNIE DES MATÉRIAUX

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures **Coefficient : 4**

L'usage des calculatrices est autorisé pour cette épreuve.

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.
Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis assurez-vous qu'il est complet, que toutes les pages sont imprimées.

Le formulaire officiel de mathématiques et deux feuilles de papier millimétré sont distribués en même temps que le sujet.

Exercice 1 *(5 points)*

1. Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes, l'équation $(z-4)(z^2+4z+16)=0$.

2. Soient les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 4 \qquad z_2 = -2-2i\sqrt{3} \qquad z_3 = -2+2i\sqrt{3} \qquad z_4 = 8e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad z_5 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

a. Donner le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1, z_2, z_3.

b. Donner les formes algébriques de z_4 et de z_5.

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. Soient les points A , B , C , D et E d'affixes respectives z_1, z_2, z_3, z_4 et z_5.

a. Placer les points A , B , C , D et E dans le repère indiqué.

b. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

Exercice 2 *(5 points)*

On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$\pi^2 y \; + \; 9y'' = 0,$$

où y est une fonction de la variable réelle x et y'' sa dérivée seconde.

1. Soit g la fonction numérique définie pour tout nombre réel x par :

$$g(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 4\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right).$$

Vérifier que la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E).

2. a. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E).

b. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie :

$$f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = \frac{\pi}{3}.$$

c. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{4}\right).$$

d. Résoudre dans l'intervalle [0 ; 3] l'équation $f(x) = 1$.

Problème *(10 points)*

Partie A

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble **R** des nombres réels l'équation $2X^2 - 5X + 2 = 0$.

   b. En déduire les solutions, sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, de l'équation $2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = 0$.
   On pourra poser $X = \ln x$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2$.
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. Limites aux bornes

   a. Étudier la limite de f en 0. Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra factoriser par $\ln x$).

2. Variations

   a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

   Vérifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{4\ln x - 5}{x}$.

   b. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

   c. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On pourra remarquer que la fonction f s'annule en $\sqrt{\mathrm{e}}$ et en e^2.

3. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\sqrt{\mathrm{e}}$.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente T dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

5. Calcul d'une aire

   a. Hachurer le domaine $\mathscr{A}$ du plan situé en dessous de l'axe $(\mathrm{O}x)$ et compris entre la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe $(\mathrm{O}x)$.

   b. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = x(2(\ln x)^2 - 9\ln x + 11)$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

   c. Calculer en cm² l'aire du domaine $\mathscr{A}$. En donner l'arrondi à 10^{-2}.

BACCALAURÉAT, SÉRIES STI (toutes spécialités), F10B,
STL (spécialités physique de laboratoire et de procédés industriels
chimie de laboratoire et de procédés industriels)

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2$

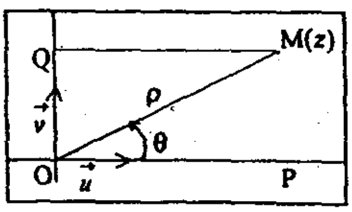
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. *NOMBRES COMPLEXES*

Forme algébrique : $z = x + iy$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$



$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$

$\overline{OP} = x = \Re e(z) = \rho \cos\theta$

$\overline{OQ} = y = \Im m(z) = \rho \sin\theta$

$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Opérations algébriques

$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$

$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Conjugué

$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$; $\bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$

$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$; $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}'$

$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz' = (\rho e^{i\theta})(\rho' e^{i\theta'}) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$

$|zz'| = |z||z'|$

$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta - \theta')}$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

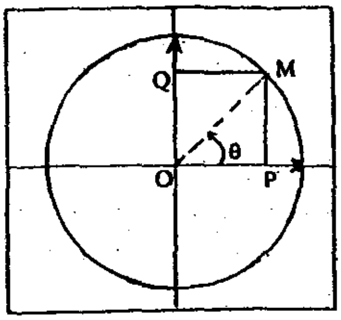
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

C. TRIGONOMÉTRIE



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad ; \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

Formules d'addition

$$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a) \ ; \ \sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$$

Formules de Moivre

Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles
$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- si $\Delta = 0$, une solution réelle double
$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées
$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$; $\quad z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $\quad u_{n+1} = u_n + a$; $\quad u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $\quad u_{n+1} = bu_n$; $\quad u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\qquad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $\qquad S_n = n + 1$

III. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$ln\,1 = 0$

$ln\,e = 1$

$ln\,ab = ln\,a + ln\,b$

$ln\dfrac{a}{b} = ln\,a - ln\,b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = exp\,x = e^x$ équivaut à $x = ln\,y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x\,ln\,a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$ln\,a^x = x\,ln\,a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha\,ln\,x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES*

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} ln\,x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\,x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\,x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} ln\,x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $ln(1+x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$

2. Suites (SÉRIES STI, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)

Si $k > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = +\infty$, si $0 < k < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty, +\infty[$
x	1	$]-\infty, +\infty[$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty, +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Si $a \leqslant b$ et $m \leqslant f \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty, +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$