BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE

Session 2006

SUJET SORTI

Épreuve :

MATHÉMATIQUES

Série

SCIENCES ET TECHNOLOGIE DE LABORATOIRE

CHIMIE DE LABORATOIRE ET DE PROCÉDÉS INDUSTRIELS

Durée de l'épreuve : 3 heures coefficient : 4

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Une feuille de papier millimétré, réservée au problème, sera distribuée au candidat.

Un formulaire de mathématiques sera distribué au candidat.

Le sujet comporte 3 pages.

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice n°1 (*5 points*)

Partie A

Pour tout nombre complexe z, on note $P(z) = z^3 - 4z^2 + 8z - 8$.

1) Calculer $P(2)$.
Vérifier que, pour tout nombre complexe z, $P(z)$ peut s'écrire sous la forme
$P(z) = (z-2)(z^2 - 2z + 4)$.

2) Résoudre, dans l'ensemble **C** des nombres complexes, l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$.
En déduire les solutions, dans l'ensemble **C** des nombres complexes, de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 2 \qquad b = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad c = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

1) **a)** Placer, sur la copie, les points A, B et C dans le plan complexe.

b) Démontrer que les points A, B et C sont sur un même cercle Γ de centre O.

c) Construire le cercle Γ.

2) Déterminer un argument du nombre complexe b. En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
Quelle est la nature du triangle OAB ?

Exercice n°2 (*5 points*)

Au niveau de la mer (altitude 0), la pression atmosphérique est 1013 hectopascal.
Dans cet exercice, on admet que la pression atmosphérique diminue de 1,25 % à chaque élévation de 100 m.

Pour tout entier naturel n, on note P_n la pression, exprimée en hectopascal, à l'altitude $100n$, exprimée en mètres.
Soit (P_n) la suite numérique des valeurs prises par cette pression atmosphérique.
On a alors $P_0 = 1013$.

1) Calculer les pressions P_1 et P_2, arrondies à l'unité, aux altitudes 100 et 200.

2) **a)** Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.

b) En déduire la nature de la suite (P_n). Préciser sa raison et son premier terme.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $P_n = 1013 \times 0{,}9875^n$.

3) Calculer la pression atmosphérique, arrondie à l'unité, à l'altitude 3200.

4) Calculer à partir de quelle altitude, à 100 m près, la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hectopascal.

Problème (*10 points*)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1-\ln x}{x}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2) En remarquant que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f(x)$ est égal à $\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{x}$, déterminer la limite de la fonction de f en $+\infty$.
Interpréter graphiquement le résultat.

3) **a)** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-2+\ln x}{x^2}$.

b) Étudier le signe de $-2+\ln x$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
En déduire le signe de f' sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4) On note I le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe $(O\,;\vec{i})$.
Déterminer les coordonnées du point I.

5) On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.
Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$.

6) Sur la feuille de papier millimétré, tracer, dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{T}$.
On prendra 1 cm pour unité graphique sur l'axe $(O\,;\vec{i})$ et 5 cm pour unité graphique sur l'axe $(O\,;\vec{j})$.

Partie B

1) **a)** On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=(\ln x)^2$.
On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Calculer $g'(x)$.

b) En déduire une primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2) **a)** Calculer $J=\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$, où f est la fonction définie dans la partie **A**.

b) Interpréter graphiquement l'intégrale J.

BACCALAURÉAT, SÉRIES STI (toutes spécialités), F108,
STL (spécialités physique de laboratoire et de procédés industriels
chimie de laboratoire et de procédés industriels)

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

Dans le cas général : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(\overline{A})=1-P(A)$; $P(\Omega)=1$; $P(\varnothing)=0$

Dans le cas équiprobable : $P(A)=\dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x)=P(X\leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X)=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i$

Variance : $V(X)=\sum_{i=1}^{n}p_i\left(x_i-E(X)\right)^2=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i^2-\left(E(X)\right)^2$

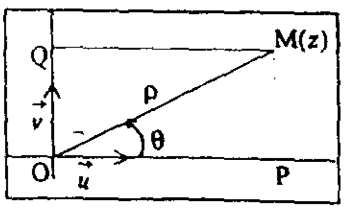
Écart type $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. *NOMBRES COMPLEXES*

Forme algébrique : $z=x+i\,y$

Forme trigonométrique : $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho e^{i\theta}$, $\rho>0$



$\overrightarrow{OM}=x\,\vec{u}+y\,\vec{v}$

$\overline{OP}=x=\Re e(z)=\rho\cos\theta$

$\overline{OQ}=y=\Im m(z)=\rho\sin\theta$

$OM=\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

Opérations algébriques

$z+z'=(x+iy)+(x'+iy')=(x+x')+i(y+y')$

$zz'=(x+iy)(x'+iy')=(xx'-yy')+i(xy'+x'y)$

Conjugué

$z=x+iy=\rho e^{i\theta}$; $\bar{z}=x-iy=\rho e^{-i\theta}$

$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$; $y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

$\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$; $\overline{zz'}=\bar{z}\,\bar{z}'$

$z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2$

$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{1}{\rho}e^{-i\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz'=\left(\rho e^{i\theta}\right)\left(\rho' e^{i\theta'}\right)=\rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$

$|zz'|=|z||z'|$

$\frac{z}{z'}=\frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}}=\frac{\rho}{\rho'}e^{i(\theta-\theta')}$

$\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$

$z^n=\left(\rho e^{i\theta}\right)^n=\rho^n e^{in\theta}$, $n\in\mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

$\left||z|-|z'|\right|\leqslant|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

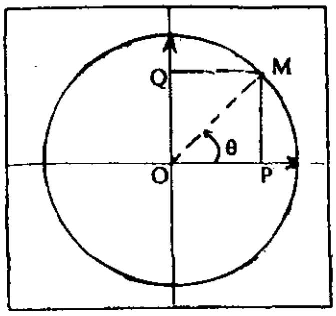
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$; $a^2+b^2=(a+ib)(a-ib)$

STI STL

C. TRIGONOMÉTRIE



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \ ;\ \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a \sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2a)\ ;\ \sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2a)$

Formules de Moivre

Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles
  $$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- si $\Delta = 0$, une solution réelle double
  $$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées
  $$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}\ ;\ z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$

STI STL

III. ANALYSE

A. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$ln\, 1 = 0$

$ln\, e = 1$

$ln\, ab = ln\, a + ln\, b$

$ln \dfrac{a}{b} = ln\, a - ln\, b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = exp\, x = e^x$ équivaut à $x = ln\, y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x\, ln\, a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$ln\, a^x = x\, ln\, a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha\, ln\, x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} ln\, x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\, x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\, x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} ln\, x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $ln(1+x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$

2. *Suites* (SÉRIES STL, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)

Si $k > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = +\infty$; si $0 < k < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty, +\infty[$
x	1	$]-\infty, +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty, +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Si $a \leqslant b$ et $m \leqslant f \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty, +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$

STI STL 4