BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2006

MATHÉMATIQUES

Série : ES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 heures. – COEFFICIENT : 5

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 *(4 points)*

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de la question et la bonne affirmation. Aucune justification n'est demandée. *Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.*

1. Si la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors l'équation $f(x)=0$ admet :

- Au moins une solution.
- Au plus une solution.
- Exactement une solution.

2. Si la fonction f est continue sur $[a;b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x)=0$ admet :

- Au moins une solution.
- Au plus une solution.
- Exactement une solution.

3. Si la fonction f est continue et positive sur $[a;b]$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal. En unités d'aire, l'aire A du domaine délimité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est donnée par la formule :

- $A = \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
- $A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- $A = f(b) - f(a)$.

4. Un produit coûte initialement 500 euros. Son prix augmente de 20%.
Si l'on veut revenir au prix initial, il faut :

- Diminuer le prix de 20%.
- Diminuer le prix de $\frac{1}{20}$ %.
- Diminuer le prix de 100 euros.

Exercice 2 *(5 points)*

On sait que la courbe C_f d'une fonction numérique f définie sur$]-2\,;\,+\infty[$, passe par les points $O(0;0)$ et $A(-1;0)$, que la tangente à C_f en O a pour coefficient directeur $\ln(2)$ et la tangente à C_f en A a pour équation $y = x + 1$.

1.a. À l'aide des données ci-dessus, donner la valeur de $f(0)$, de $f'(0)$, de $f(-1)$ et de $f'(-1)$.

b. Donner une équation de la tangente en O à C_f.

2. Nous savons qu'il existe des réels a, b et c tels que pour tout $x > -2$:

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)\ln(x+2).$$

a. Exprimer $f(0)$ à l'aide de a, b et c.

b. Exprimer $f'(x)$ à l'aide de a, b et c.

c. En déduire $f'(0)$ et $f'(-1)$ à l'aide de a, b et c.

d. En déduire les valeurs de a, b et c..

Exercice 3 *(5 points)*

Une enquête est réalisée auprès des clients d'une compagnie aérienne. Elle révèle que 40% des clients utilisent la compagnie pour des raisons professionnelles, que 35% des clients utilisent la compagnie pour des raisons touristiques et le reste pour diverses autres raisons.
Sur l'ensemble de la clientèle, 40% choisit de voyager en première classe et le reste en seconde classe.
En fait, 60% des clients pour raisons professionnelles voyagent en première classe, alors que seulement 20% des clients pour raison touristiques voyagent en première classe.

On choisit au hasard un client de cette compagnie. On suppose que chaque client à la même probabilité d'être choisi.
On note :
A l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles »
T l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons touristiques »
D l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques »
V l'événement « le client interrogé voyage en première classe ».

Si E et F sont deux événements, on note $p(E)$ la probabilité que E soit réalisé, et $p_F(E)$ la probabilité que E soit réalisé sachant que F est réalisé. D'autre part, on notera $\overline{E}$ l'événement contraire de E.

1. Déterminer : $p(A)$, $p(T)$, $p(V)$, $p_A(V)$ et $p_T(V)$.

2.a. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons professionnelles.
b. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons touristiques.
c. En déduire la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques.

3. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles sachant qu'il a choisi la première classe.

4. Soit un entier n supérieur ou égal à 2. On choisit n clients de cette compagnie aérienne d'une façon indépendante.
On note p_n la probabilité qu'au moins un de ces clients voyage en seconde classe.
a. Prouver que : $p_n = 1 - 0{,}4^n$.
b. Déterminer le plus petit entier n pour lequel $p_n > 0{,}9999$.

Exercice 4 *(6 points)*

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$.

Dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm sur chaque axe, on note C_f sa représentation graphique et $C_{\exp}$ la représentation graphique de la fonction exponentielle.

1.a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Donner les valeurs de $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^x$ et de $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$.

c. En déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ .Que peut-on en déduire graphiquement ?

2.a. On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$, montrer que $f'(x) = (x + 1)(x + 2)\, e^x$.

b. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.

4.a. Préciser les positions relatives de C_f et de $C_{\exp}$.

b. Construire ces deux courbes dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

5. Soit F la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $F(x) = (x^2 - x + 2)e^x$.

Prouver que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

6.a. Déterminer la valeur exacte de l'aire en cm^2 du domaine D délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

b. Déterminer la valeur exacte de l'aire en cm^2 du domaine D' délimité par les courbes C_f et $C_{\exp}$, et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.