

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SÉRIE L

SESSION 2006

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 3

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

EXERCICE 1 (6 points)

Un jeu consiste à jeter un dé de forme tétraédrique dont les faces sont numérotées de 1 à 4.

Ce dé est pipé de telle façon que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro porté par cette face.

On note p_i la probabilité d'obtenir le nombre i pour $i \in \{1; 2; 3; 4\}$.

1. Exprimer p_i en fonction de i puis vérifier que la probabilité d'obtenir un nombre pair est $\frac{3}{5}$.
2. On jette le dé. Si le nombre obtenu est pair, la somme reçue par le joueur est égale à sa mise augmentée de 10 %. Si le nombre obtenu est impair, le joueur reçoit sa mise diminuée de 11 euros. La mise minimale est de 20 euros.

Un joueur décide de faire trois parties successives :

- il mise cent euros pour la première partie ;
- pour la seconde partie il mise la somme reçue à l'issue de la première partie ;
- pour la troisième partie il mise la somme reçue à l'issue de la seconde partie.

- a) Montrer que, pour ce joueur, les montants possibles de la somme reçue à l'issue des trois parties sont, arrondies à un euro près, 133 euros, 110 euros, 109 euros, 108 euros, 88 euros, 87 euros, 86 euros et 67 euros.
- b) Montrer que la probabilité de gagner 110 euros est égale à $\frac{18}{125}$.
- c) Calculer la probabilité de chacun des quatre événements qui conduisent à une perte.
- d) Montrer que la probabilité, pour ce joueur, de gagner de l'argent est supérieure à celle d'en perdre.

Indication : pour la question 2, on pourra s'aider d'un arbre.

EXERCICE 2 (5 points)

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x - 2x$.

1. Calculer $g'(x)$ où g' désigne la dérivée de g puis dresser le tableau de variations de g .
2. En déduire que pour tout réel x de \mathbb{R} , $g(x) > 0$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - x^2$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
Pour la limite en $+\infty$ on pourra remarquer que pour x non nul $f(x)$ peut s'écrire :
$$x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - 1 \right).$$
2. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f , puis en utilisant la partie A construire le tableau de variations de f .
3. On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans \mathbb{R} .
 - a) Calculer $f(-1)$ et $f(0)$.
 - b) Montrer que la solution de l'équation $f(x) = 0$ est unique et qu'elle appartient à l'intervalle $[-1 ; 0]$.
 - c) En utilisant une calculatrice pour calculer $f(x)$ pour différentes valeurs de x , donner une valeur approchée à 10^{-3} près de cette solution.
Justifier la valeur retenue.

EXERCICE 3 (5 points)

La reine Cléopâtre ordonna à son architecte, le célèbre Numérobis, de réaliser une pyramide régulière à base carrée dont les dimensions devaient être telles que le carré de la hauteur soit égal à l'aire de chaque face triangulaire de cette pyramide

- 1) Compléter le dessin donné en annexe, représentant la pyramide en perspective cavalière ; L est le centre du carré AOUT, I est le sommet de la pyramide, J le milieu du segment [OU].

On pose $OJ = r$; $IL = h$ et $t = \frac{IJ}{JL}$.

- 2) Calculer :

- La longueur JL en fonction de r .
- La longueur IJ en fonction de r et de h .
- En déduire la valeur de t en fonction de r et h .
- L'aire du triangle OUI en fonction de r et h .

- 3) Montrer que l'exigence de Cléopâtre se traduit par la relation :

$$\frac{h^2}{r^2} = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{r} \quad (1).$$

- 4) a) Calculer $t^2 - 1$.

b) En déduire qu'alors l'égalité (1) peut s'écrire : $t^2 - t - 1 = 0$ (2).

- 5) a) Montrer que : $(t - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} = t^2 - t - 1$

b) En déduire les solutions de l'équation (2).

c) Quel nom porte la seule solution possible ?

EXERCICE 4 (4 points)

Un globe-trotter a parié de parcourir 5 000 km à pied.

Il peut, frais et dispos, parcourir 50 km en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de 1% tous les jours.

On notera d_n la distance parcourue durant le n -ième jour.

- 1) Calculer les distances d_1 , d_2 , d_3 parcourues durant les trois premiers jours.
- 2) Expliquer pourquoi $d_{n+1} = 0,99d_n$.
En déduire la nature de la suite (d_n) et l'expression de d_n en fonction de n .
- 3) a) Calculer, en fonction de n , le nombre total L_n de kilomètres parcourus au bout de n jours
($L_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n$).

b) En déduire la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Le globe-trotter peut-t-il gagner ?
- 4) À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours N qui lui seraient nécessaires pour parcourir 4 999 km.

On rappelle que :

. La somme S des n premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison r est :

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = n \frac{u_1 + u_n}{2} .$$

. La somme S' des n premiers termes d'une suite géométrique (v_n) de raison q ($q \neq 1$) est :

$$S' = v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} .$$

ANNEXE DE L'EXERCICE 3 à rendre avec la copie

