La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel, distribué par le centre d'examen, est autorisé.

EXERCICE 1 (*9 points*)

Le thème de l'exercice est l'évolution de l'épidémie de SRAS de 2003.
Le tableau suivant donne les nombres de cas déclarés (N_i),
relevés aux dates suivantes : 4 , 8 , 11 , 15 , 18 , 23 et 28 avril 2003 :

x_i	4	8	11	15	18	23	28
N_i	2322	2671	2890	3235	3461	4288	5050

On pose $y_i = \ln N_i$ (ln désigne le logarithme népérien).

1. Recopier et compléter le tableau suivant en donnant les résultats arrondis à 0,01 près.

x_i	4	8	11	15	18	23	28
y_i	7,75						8,53

2. Représenter le nuage de points de coordonnées (x_i ; y_i) dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 0,5 cm pour 1 jour sur l'axe des abscisses et
10 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.
On graduera l'axe des ordonnées à partir de 7.

3. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage obtenu (résultats arrondis à 0,01 près).

4. Soit d la droite passant par le premier et le dernier point du nuage.
Une équation de d est $y = 0,0325\,x + 7,62$.
Le point G appartient-il à d ?
Placer G et d sur le dessin précédent.

5. On admet que d constitue un ajustement convenable du nuage de points.
a) En utilisant l'équation de d, déterminer la valeur de y correspondant à $x = 38$.
En déduire une estimation du nombre de cas prévisibles le 8 mai.

b) A l'aide de l'ajustement affine $y = 0,0325\,x + 7,62$ et de la relation $y = \ln N$, exprimer N en fonction de x.
Déterminer, en utilisant ce modèle, à partir de quelle valeur entière de x, N est supérieur ou égal à 10 000.

6. Le nombre de cas répertoriés a été, en réalité, de 7053 le 8 mai.
Le modèle étudié dans cet exercice est-il adapté pour décrire la situation le 8 mai (on considère que le modèle est adapté si l'écart entre la valeur réelle et la valeur donnée par le modèle est inférieur à 50 unités) ?

EXERCICE 2 (*11 points*)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 3] par $f(x) = 6 - 5x\mathrm{e}^{-2x+2}$.
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a) Montrer que, pour tout x de l'intervalle [0 ; 3], $f'(x) = 5(2x-1)\mathrm{e}^{-2x+2}$.
   b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [0 ; 3].
   c) Déterminer les valeurs exactes de $f(0)$, $f(0{,}5)$, $f(3)$ et dresser le tableau de variation de f.

2. a) Donner les valeurs arrondies au dixième de $f(x)$ pour les valeurs suivantes de x :
   0,25 ; 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3.

   b) Calculer le coefficient directeur de la tangente à C aux points d'abscisses :
   x_1 = 0,75 , x_2 = 1 et x_3 = 1,25. (On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près).
   Pour laquelle de ces abscisses, le coefficient directeur est-il le plus grand ?

3. a) Tracer les tangentes à la courbe C aux points d'abscisses x_1, x_2 et x_3.

   b) Tracer la courbe C.

Partie B

On considère que la courbe C donne un modèle de la variation de la température de l'eau en fonction de la profondeur près de l'estuaire d'un grand fleuve un jour d'hiver.
La température est exprimée en degrés Celsius et la profondeur en centaines de mètres.

1. A quelle profondeur la température de l'eau est-elle minimale ?

2. Déterminer graphiquement pour quelles profondeurs la température est comprise entre 0°C et 4°C. Faire figurer les constructions utiles.

3. En utilisant la question A.2., indiquer au voisinage de quelle profondeur, entre 50 m et 300 m, la température de l'eau augmente le plus rapidement.

BACCALAURÉAT, SÉRIES STT spécialités comptabilité et gestion, informatique et gestion

STL spécialité biochimie - génie biologique

F12

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. STATISTIQUE *(SÉRIES STL, STT)*

Moyenne, variance, écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i \quad ; \quad V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

II. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad ; \quad P(\Omega) = 1 \quad ; \quad P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

III. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$.

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n + 1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

C. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double
$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

IV. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. *Fonctions logarithme et exponentielle*

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. *Fonctions puissances*

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS*

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$, n entier naturel

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$, n entier naturel non nul

STT, STL, F12

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$

(SÉRIES F12, STL)

$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u'+v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL* *(SÉRIES F12, STT)*

Formule fondamentale

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Valeur moyenne de f sur $[a\,,b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES* *(SÉRIE STL)*

Équations	Solutions sur $]-\infty,+\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$

STT STI F12