BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2006

MATHÉMATIQUES

SCIENCES ET TECHNOLOGIES TERTIAIRES

Spécialités : Comptabilité et Gestion – Informatique et Gestion.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Durée de l'épreuve : 3 heures – Coefficient : 4.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices est autorisé.

Le formulaire de Mathématiques est joint au sujet.

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de cinq questions : chacune comporte trois réponses, une réponse et une seule étant exacte.
Les réponses à cet exercice sont à inscrire dans la feuille jointe en annexe, en cochant pour chaque question la case correspondant à la réponse proposée. Aucune justification n'est demandée.
La réponse exacte à une question rapporte 1 point ; une réponse fausse à une question (ou une réponse multiple) coûte 0,5 point, l'absence de réponse ne rapporte rien. Si le total de l'exercice est négatif, il est ramené à 0.

Une grande boulangerie propose 500 pains dont la répartition est donnée dans le tableau suivant.

	Nature	**Sans sel**	**Complet**	**Total**
Pain maison	100	40	70	210
Pain de campagne	80	30	50	160
Pain au levain	60	40	30	130
Total	240	110	150	**500**

1. Le pourcentage de pains maison parmi l'ensemble des pains à vendre est :

a) 20 % **b)** 42 % **c)** 35 %

2. Le pourcentage des pains au levain parmi les pains nature est :

a) 36 % **b)** 12 % **c)** 25 %

3. Le premier client achète au hasard l'un des pains de la boulangerie, la probabilité pour que ce soit un pain de campagne **ou** un pain complet est :

a) 0,10 **b)** 0,52 **c)** 0,3

4. Un client achète au hasard un pain sans sel, la probabilité que ce soit un pain au levain est :

a) $\frac{13}{50}$ **b)** $\frac{4}{11}$ **c)** $\frac{11}{50}$

5. Le prix d'un pain de campagne en 2000 était p_0 euros. Le prix du même pain de campagne en 2006 est $p_6 = 1{,}5$ €. Sachant que le prix de ce pain de campagne a augmenté de 4 % par an de 2000 à 2006, p_0 était :

a) 1,17 € **b)** 1,09 € **c)** 1,19 €

EXERCICE 2 (6 points)

Un artisan ferronnier doit fabriquer des tables et fauteuils métalliques en volutes pour un grand magasin.

Chaque table nécessite 10 kg de fer, 2 litres de peinture anti-corrosion et demande 3 heures de travail.
Chaque fauteuil nécessite 5 kg de fer, 4 litres de peinture anti-corrosion et demande 4 heures de travail.

Pour cet ouvrage, l'artisan reçoit 100 kg de fer et 36 litres de peinture anti-corrosion.
Les délais imposés font qu'il ne dispose que de 40 heures de travail.

On note x le nombre de tables et y le nombre de fauteuils que l'artisan va réaliser.

1. Montrer que les contraintes de cette situation peuvent être traduites par le système d'inéquations

$$(S)\begin{cases} 2x + y \leqslant 20 \\ x + 2y \leqslant 18 \\ 3x + 4y \leqslant 40 \end{cases} \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers naturels.}$$

2. Dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$, avec 1 cm pour 1 unité sur les deux axes, mettre en évidence l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan, solution du système (S), en hachurant la partie du plan qui ne convient pas.

3. L'artisan recevra 60 € pour chaque table produite et 40 € pour chaque fauteuil produit.

Soit S le salaire que l'artisan recevra pour la confection de x tables et y fauteuils.

a. Exprimer S en fonction de x et y.

b. Déterminer une équation de la droite (d) correspondant à un salaire de 440 € et compléter le graphique précédent en traçant la droite (d).

c. En justifiant la démarche, déterminer graphiquement le couple d'entiers $(x\ ;\ y)$ qui permettra à l'artisan d'obtenir le meilleur salaire.
Préciser le montant de ce salaire maximum.
À combien s'élève alors son salaire horaire ?

PROBLÈME **(9 points)**

PARTIE A

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

La courbe $(\mathscr{C})$, donnée en annexe 2, est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=-x^2+10x-9-8\ln x$.

1. Déterminer la limite de f en 0. Que peut-on en déduire concernant la courbe ?
2. En écrivant $f(x)$ sous la forme $f(x)=x^2\left(-1+\frac{10}{x}-\frac{9}{x^2}-\frac{8\ln x}{x^2}\right)$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout réel x de $]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{-2(x-1)(x-4)}{x}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x dans l'intervalle $]0;+\infty[$.
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. **a.** Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous (les résultats seront arrondis à 10^{-4}).

x	6,18	6,19	6,20	6,21
$f(x)$				

   b. L'équation $f(x)=0$ admet deux solutions, 1 et α dans $]0;+\infty[$. À l'aide de la question précédente, donner sans justification un encadrement à 10^{-2} près de α.

   c. Placer α sur le graphique de l'annexe 2.
7. Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x)=-\frac{x^3}{3}+5x^2-x-8x\ln x$.
   Démontrer que F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.
8. Hachurer la partie (P) du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équation $x=3$ et $x=6$, puis donner la valeur exacte de la mesure, exprimée en unités d'aire, de l'aire de (P).

PARTIE B - Application économique.

Une entreprise doit produire entre 10 et 70 pièces par jour.

On admet que si x est la production journalière en **dizaines de pièces** alors le bénéfice réalisé en **milliers d'euros** est $f(x)$, où f est la fonction étudiée dans les deux premières parties avec $x \in [1;7]$.

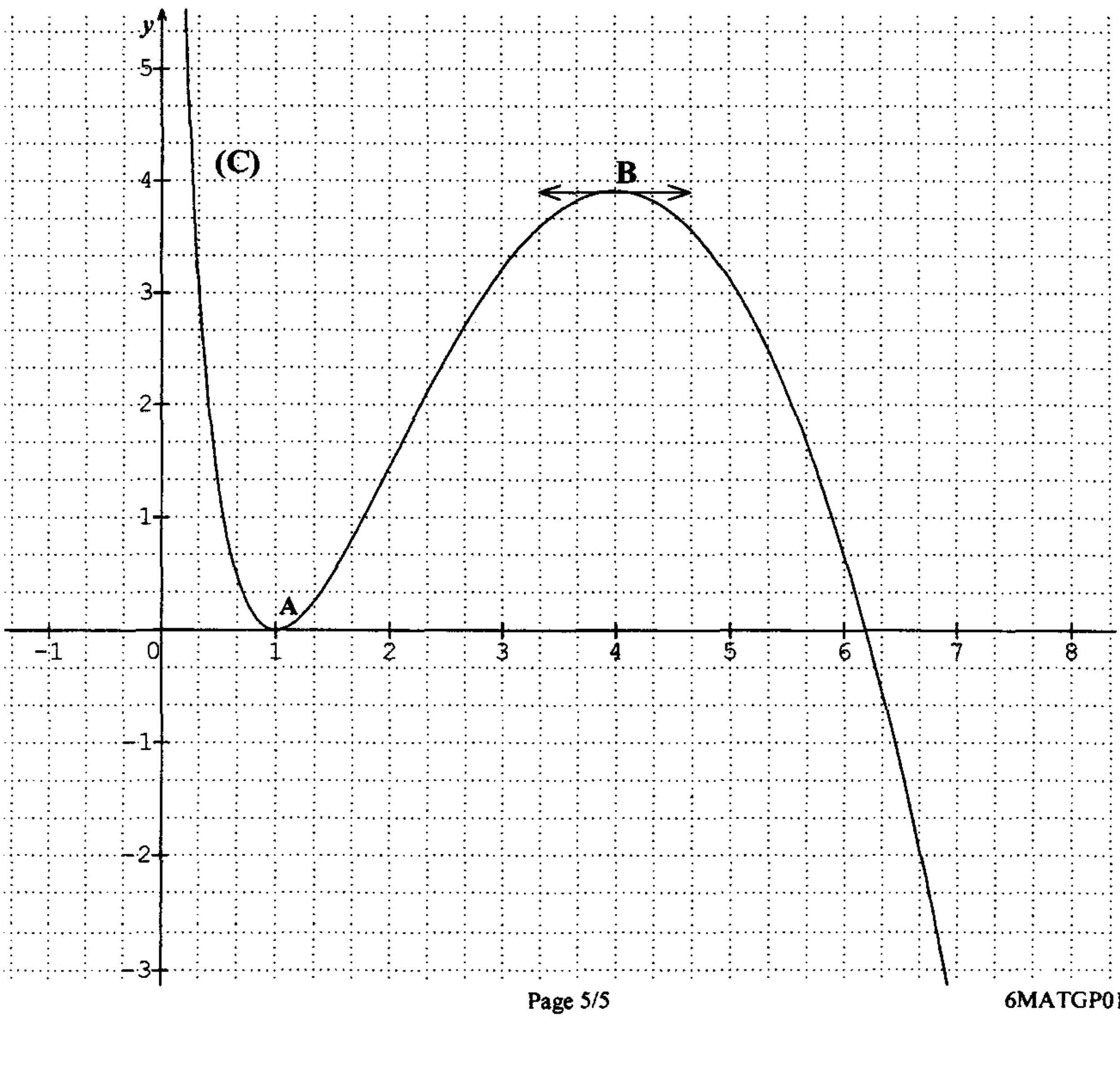
1. Déterminer à l'aide de la courbe $(\mathscr{C})$ de l'annexe 2, la quantité de pièces fabriquées par jour, à partir de laquelle l'entreprise commence à travailler à perte.
   Donner une valeur approchée de cette valeur à 1 près.
2. Par lecture graphique, indiquer la quantité de pièces que l'entreprise doit fabriquer par jour pour réaliser un bénéfice maximal.
3. On admet que lorsque l'entreprise produit entre 30 et 60 pièces par jour sur une certaine période, le bénéfice journalier moyen en milliers d'euros est donné par $\frac{1}{3}\int_3^6 f(x)\,dx$.
   À l'aide de la partie A, déterminer à 1 € près ce bénéfice journalier moyen.

Annexe 1 à rendre avec la copie

Réponses à l'exercice 1 *(mettre une croix dans la case correspondant à la réponse choisie)*

	a)	b)	c)
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

Annexe 2 à rendre avec la copie



BACCALAURÉAT, SÉRIES STT spécialités comptabilité et gestion, informatique et gestion

STL spécialité biochimie - génie biologique

STI Arts Appliqués

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. STATISTIQUE *(SÉRIES STL, STT)*

Moyenne, variance, écart type

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \ ; \quad V(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\bar{x})^2$$

$$\sigma_x=\sqrt{V(x)}$$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}n_i x_i \ ; \ V(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}n_i(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}n_i x_i^2-(\bar{x})^2$$

II. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

Dans le cas général : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(\bar{A})=1-P(A) \quad ; \quad P(\Omega)=1 \quad ; \quad P(\varnothing)=0$

Dans le cas équiprobable : $P(A)=\dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

III. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1}=u_n+a$; $u_n=u_0+na$

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1}=bu_n$; $u_n=u_0b^n$

Si $b\neq 1$, $\quad S_n=1+b+b^2+\cdots+b^n=\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Si $b=1$, $\quad S_n=n+1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad ; \quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

C. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a\neq 0$, et $\Delta=b^2-4ac$.

L'équation $ax^2+bx+c=0$ admet :

- si $\Delta>0$, deux solutions réelles
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- si $\Delta=0$, une solution réelle double
$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$
- si $\Delta<0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta\geqslant 0$, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

IV. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$ln\,1 = 0$

$ln\,e = 1$

$ln\,ab = ln\,a + ln\,b$

$ln\dfrac{a}{b} = ln\,a - ln\,b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = exp\,x = e^x$ équivaut à $x = ln\,y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x\,ln\,a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$ln\,a^x = x\,ln\,a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha\,ln\,x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS*

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x\to0} ln\,x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x\to0} x^\alpha = +\infty$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln\,x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$, n entier naturel

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln\,x}{x^n} = 0$, n entier naturel non nul

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* **(Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)**

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$

(SÉRIES F12, STL)

$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL* *(SÉRIES F12, STT)*

Formule fondamentale

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES* *(SÉRIE STL)*

Équations	Solutions sur $]-\infty,+\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$