SESSION 2007

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

SPECIALITES	COEF.	DUREE
CONTROLE INDUSTRIEL ET REGULATION AUTOMATIQUE	**2**	**3**
ELECTROTECHNIQUE	**1**	**3**
GENIE OPTIQUE	**3**	**3**
INFORMATIQUE ET RESEAUX POUR L'INDUSTRIE ET LES SERVICES TECHNIQUES	**3**	**3**
SYSTEMES ELECTRONIQUES	**2**	**3**

MATHEMATIQUES

Le sujet comprend 7 pages, numérotées de 1 à 7.
Les pages 6 et 7 sont à rendre avec la copie.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 7 pages, numérotées de 1 à 7.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

Code sujet
MATGRA1

Exercice 1 (12 *points*)

On s'intéresse à un système entrée-sortie susceptible d'être contrôlé.
Dans la partie A, on étudie le système en l'absence de contrôle.
Dans la partie B, on étudie le système soumis à un contrôle.
Les parties A, B et C sont indépendantes dans leurs résolutions respectives.

Partie A

On considère l'équation différentielle (E_1) suivante :

$$\frac{1}{2}y'(t)+y(t)=10-\beta \qquad (E_1)$$

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle t et β une constante réelle.

1. Montrer que la fonction h définie pour tout nombre réel t par $h(t)=10-\beta$ est solution de l'équation différentielle (E_1).

2. Résoudre l'équation différentielle (E_1).

3. Montrer que la fonction f, solution de l'équation différentielle (E_1) et qui vérifie $f(0)=10$ est définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(t)=\beta e^{-2t}+10-\beta$.

4. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ que l'on note f_∞.

Partie B

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\begin{cases} U(t)=0 & \text{si } t<0 \\ U(t)=1 & \text{si } t\geq 0 \end{cases}$$

et qu'une fonction définie sur $\mathbf{R}$ est dite causale si elle est nulle pour tout nombre réel strictement négatif.

On considère la fonction causale g qui vérifie la relation (E_2) suivante :

$$\frac{1}{2}g'(t)+g(t)=13\int_0^t[10U(u)-g(u)]\mathrm{d}u+(10-\beta)\,U(t) \qquad (E_2)$$

et la condition $g(0)=10$.

On admet que la fonction g admet une transformée de Laplace notée G.

1. Montrer que la transformée de Laplace I de la fonction i définie par :

$$i(t)=13\int_0^t[10U(u)-g(u)]\mathrm{d}u$$

est telle que :

$$I(p)=\frac{130}{p^2}-13\frac{G(p)}{p}.$$

2. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de la relation (E_2), déterminer une expression de $G(p)$.

3. Vérifier que : $G(p)=\dfrac{10}{p}-\dfrac{2\beta}{(p+1)^2+5^2}$.

4. Dans cette question, on va déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)$, que l'on note g_∞ et qui est la valeur finale du signal représenté par la fonction g.
On rappelle que, d'après le théorème de la valeur finale, $g_\infty = \lim\limits_{p\to 0^+} pG(p)$.
Déterminer g_∞.

5. **a)** Déterminer la transformée de Laplace de la fonction qui à tout nombre réel t associe $e^{-t}\sin(5t)U(t)$.

   b) En déduire l'expression de $g(t)$.

Partie C

Dans cette partie, on prend $\beta = 5$.

En **annexe 1, à rendre avec la copie**, on a représenté, sur l'intervalle $[0;+\infty[$, les courbes C_f et C_g représentatives des fonctions f et g définies dans les parties A et B avec $\beta = 5$.
On admet ici que pour tout nombre réel t positif ou nul : $f(t)=5e^{-2t}+5$ et $g(t)=10-2e^{-t}\sin(5t)$.
On rappelle que f_∞ et g_∞ sont les limites respectives des fonctions f et g en $+\infty$.
On a donc : $f_\infty = 5$ et $g_\infty = 10$.

1. **a)** Vérifier que pour tout nombre réel t positif ou nul on a : $\dfrac{f(t)-f_\infty}{f_\infty}=e^{-2t}$.

   b) Soit t_1 le nombre réel tel que :
$$\frac{f(t)-f_\infty}{f_\infty}\leq 0{,}02 \qquad \text{pour tout } t\geq t_1.$$
   Calculer la valeur exacte de t_1, puis une valeur approchée de t_1, arrondie au dixième.

2. Soit t_2 le nombre réel tel que :
$$-0{,}02\leq \frac{g(t)-g_\infty}{g_\infty}\leq 0{,}02 \qquad \text{pour tout } t\geq t_2.$$
   Graphiquement, déterminer une valeur approchée de t_2, arrondie au dixième.

Dans ce problème, on a étudié un système entrée-sortie, dans la partie A libre de tout asservissement, puis dans la partie B contrôlé par une commande intégrale.
On a montré que grâce à cette commande on peut stabiliser la sortie à la valeur 10 indépendamment de la perturbation β, au prix d'une détérioration du temps de réponse du système et de l'apparition d'oscillations amorties.

Exercice 2 (8 *points*)

On désigne par j le nombre complexe de module 1 dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.

On considère un filtre dont la fonction de transfert T est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$T(\omega) = \frac{-\mathrm{j}\omega k}{1-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}}.$$

Le nombre k est un nombre réel strictement compris entre 0 et 1.

En associant trois filtres identiques au précédent, on obtient un système dont la fonction de transfert H est définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$H(\omega) = (T(\omega))^3.$$

1. On note $r(\omega)$ le module de $H(\omega)$.
On a donc : $r(\omega) = |H(\omega)|$.

a) Montrer que le module de $T(\omega)$ est $\dfrac{k\omega}{\sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{4}}}$.

b) En déduire $r(\omega)$.

2. a) Justifier qu'un argument de $(-\mathrm{j}\omega k)^3$ est $\frac{\pi}{2}$.

Justifier qu'un argument de $1-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}$ est $-\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

En déduire qu'un argument de $H(\omega)$, noté $\varphi(\omega)$, est défini sur $]0;+\infty[$ par :

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} + 3\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

b) On note φ' la dérivée de la fonction φ. Calculer $\varphi'(\omega)$.

Déterminer le signe de φ' sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

c) Déterminer les limites de la fonction φ en 0 et en $+\infty$.

3. Dans le tableau ci-après on donne les variations de la fonction r sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
Recopier et compléter ce tableau en utilisant les résultats obtenus dans la question 2.

ω	0		$+\infty$
$r'(\omega)$		$+$	
$r(\omega)$		0 $\nearrow$	$8k^3$
$\varphi(\omega)$			
$\varphi'(\omega)$			

4. Dans cette dernière question, on se place dans le cas où $k = 0{,}9$.

Lorsque ω décrit l'intervalle $]0;+\infty[$, le point d'affixe $H(\omega)$ décrit une courbe $\mathscr{C}$.
En **annexe 2, à rendre avec la copie**, la courbe $\mathscr{C}$ est tracée dans le plan complexe.

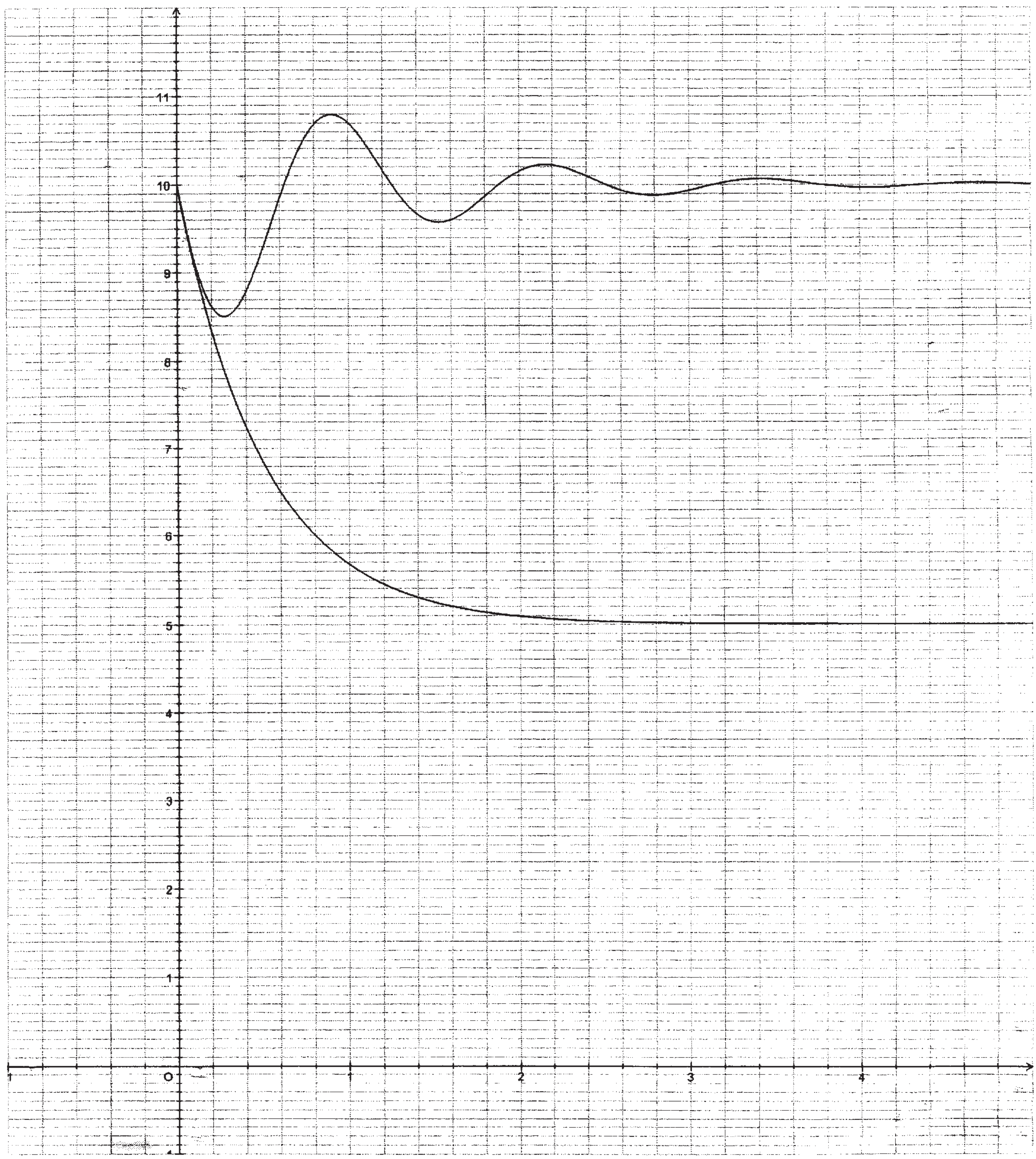
On note ω_0 la valeur de ω pour laquelle le module de $H(\omega)$ est égal à 1.

a) Placer précisément le point M_0 d'affixe $H(\omega_0)$ sur le document réponse donné en **annexe 2**.

b) Calculer une valeur arrondie à 10^{-2} près du nombre ω_0, puis de $\varphi(\omega_0)$.

Annexe 1

Document-réponse à rendre avec la copie



Annexe 2

Document-réponse à rendre avec la copie