SESSION 2010

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

SPÉCIALITÉS	COEF.	DURÉE
CONTRÔLE INDUSTRIEL ET RÉGULATION AUTOMATIQUE	2	3
ÉLECTROTECHNIQUE	2	3
GÉNIE OPTIQUE	3	3
SYSTÈMES ÉLECTRONIQUES	2	3
TECHNIQUES PHYSIQUES POUR L'INDUSTRIE ET LE LABORATOIRE	3	3

MATHÉMATIQUES

Le sujet comprend 9 pages, numérotées de 1 à 9.
Les pages 7, 8 et 9 sont à rendre avec la copie.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 7 pages, numérotées de 1 à 7.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

Code sujet
MATGRA1

Exercice 1 (10 *points*)

Dans cet exercice, on se propose d'étudier dans la partie A une perturbation d'un signal continu et, dans la partie B, la correction de cette perturbation par un filtre analogique.

Partie A

Dans cet exercice, on note τ une constante réelle appartenant à l'intervalle $[0;2\pi]$ et on considère les fonctions f et g, définies sur l'ensemble **R** des nombres réels, telles que :

- pour tout nombre réel t, $f(t)=1$;
- la fonction g est périodique de période 2π et :

$$\begin{cases} g(t)=0 \text{ si } 0\leq t<\tau \\ g(t)=1 \text{ si } \tau\leq t<2\pi \end{cases}$$

Pour tout nombre réel t, on pose :

$$h(t)=f(t)-g(t)$$

La fonction h ainsi définie représente la perturbation du signal.

1. Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées sur le **document réponse n°1 (figures 1 et 2)**.
Sur la **figure 3** du **document réponse n°1**, tracer la représentation graphique de la fonction h.

2. On admet que la fonction h est périodique de période 2π.
Pour tout nombre réel t, on définit la série de Fourier $S(t)$ associée à la fonction h par

$$S(t)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\right)$$

a) Déterminer a_0.

b) Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1.
Calculer

$$\int_0^{\tau}\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

et en déduire que

$$a_n=\frac{1}{n\pi}\sin(n\tau).$$

c) Montrer que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1,

$$b_n=\frac{1}{n\pi}\left(1-\cos(n\tau)\right).$$

3. Soit n un nombre entier naturel. On associe à n le nombre réel A_n tel que :

- $A_0=a_0$
- $A_n=\sqrt{\dfrac{a_n^2+b_n^2}{2}}$ si n est un nombre entier supérieur ou égal à 1.

Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $A_n=\dfrac{1}{n\pi}\sqrt{1-\cos(n\tau)}$.

On suppose, pour toute la suite de l'exercice, que $\tau = \frac{\pi}{4}$.

4. Compléter le **tableau 1** du **document réponse n°2**, avec des valeurs approchées à 10^{-5} près.

5. La valeur efficace h_{eff} de la fonction h est telle que :

$$h_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [h(t)]^2 \, dt .$$

   a) Calculer h_{eff}^2.

   b) Calculer une valeur approchée à 10^{-4} près du nombre réel P défini par $P = \sum_{n=0}^{3} A_n^2$.

   c) Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près du quotient $\frac{P}{h_{eff}^2}$.

Partie B

On rappelle que j est le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.

On considère la fonction de transfert H définie, pour tout nombre complexe p différent de $-\frac{3}{2}$, par :

$$H(p) = \frac{3}{2p+3}.$$

On définit la fonction r, pour tout nombre réel positif ω, par :

$$r(\omega) = |H(\mathrm{j}\omega)|.$$

Le but de cette partie est de déterminer le spectre d'amplitude du signal, noté k, obtenu en filtrant la perturbation h au moyen d'un filtre dont la fonction de transfert est H.

1. Montrer que $r(\omega) = \frac{3}{\sqrt{9+4\omega^2}}$.

2. Pour tout nombre entier naturel n, on définit le nombre réel positif B_n par :

$$B_n = r(n) \times A_n ,$$

   où A_n est le nombre réel positif défini dans la question 3 de la **partie A**.
   Compléter le **tableau 2** du **document réponse n°2**, avec des valeurs approchées à 10^{-5} près.

   Le spectre d'amplitude du signal filtré k est donné par la suite des nombres réels B_n.

3. La **figure 4** sur le **document réponse n°2** donne le spectre d'amplitude de la perturbation h, c'est-à-dire une représentation graphique de la suite des nombres réels A_n.

Sur la **figure 5** du **document réponse n°2**, on a commencé de même à représenter la suite des nombres réels B_n.
Compléter cette représentation graphique à l'aide du tableau de valeurs n°2 du **document réponse n°2**.

4. Une valeur approchée à 10^{-4} près du carré de la valeur efficace du signal k est : $k_{eff}^2 \approx 0{,}0516$.

a) Calculer une valeur approchée à 10^{-4} près du nombre réel Q défini par $Q = \sum_{n=0}^{3} B_n^2$.

b) Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près du quotient $\dfrac{Q}{k_{eff}^2}$.

On a étudié le spectre de Fourier d'une perturbation d'un signal. On ne peut pas négliger les raies de hautes fréquences de ce spectre. Le filtrage dissipe une part importante de l'énergie de la perturbation et les raies de hautes fréquences de la perturbation filtrée sont négligeables.

Exercice 2 (10 *points*)

On considère un système physique dont l'état est modélisé par la fonction y de la variable réelle t, solution de l'équation différentielle :

$$y''(t)+4y(t)=e(t) \qquad \textbf{(1)},$$

où la fonction e représente une contrainte extérieure au système.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que $e(t)=20$ pour tout nombre réel t.
L'équation différentielle (1) s'écrit alors sous la forme :

$$y''(t)+4y(t)=20 \qquad \textbf{(2)}.$$

1. Déterminer la fonction constante h solution particulière de l'équation différentielle **(2)**.

2. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle **(2)**.

3. En déduire l'expression de la fonction f solution de l'équation différentielle **(2)** qui vérifie les conditions $f(0)=0$ et $f'(0)=0$.

Partie B

Dans cette partie, on étudie un moyen d'amener le système vers un état d'équilibre de manière « lisse ».
À cette fin, on soumet le système à une contrainte extérieure modélisée par la fonction e définie par :

$$e(t)=8tU(t)-8(t-\tau)U(t-\tau),$$

où τ désigne un nombre réel strictement positif.

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\begin{cases} U(t)=0 & \text{si } t<0 \\ U(t)=1 & \text{si } t\geq 0 \end{cases}.$$

Une fonction définie sur $\mathbf{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

On appelle g la fonction causale telle que :

$$g''(t)+4g(t)=e(t)$$

et vérifiant :

$$g(0)=0 \text{ et } g'(0)=0.$$

On note $G(p)$ la transformée de Laplace de la fonction g et $E(p)$ la transformée de Laplace de la fonction e.

1. Exprimer $E(p)$ en fonction de p et de τ.

2. En déduire que :

$$G(p)=\frac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}\left(1-\mathrm{e}^{-\tau p}\right).$$

3. Déterminer les constantes réelles A et B telles que :

$$\frac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}=\frac{A}{p^2}+\frac{B}{p^2+4}.$$

4. Déterminer alors l'original de $\dfrac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}$.

5. En déduire que, pour tout nombre réel t :

$$g(t)=g_0(t)-g_0(t-\tau) \qquad \text{avec } g_0(t)=\left(2t-\sin(2t)\right)U(t).$$

6. Montrer que pour $t \geq \tau$, on a :

$$g(t)=2\tau-\sin(2t)+\sin(2t-2\tau).$$

7. On suppose maintenant que $\tau=\pi$.

a) Simplifier l'expression de $g(t)$ pour $t \geq \tau$.

b) La courbe représentative de la fonction e, pour $\tau=\pi$, est tracée sur la figure du **document réponse n°3**.

Sur le même graphique, tracer la courbe représentative de la fonction g.

Document réponse n°1, à rendre avec la copie (exercice 1)

Figure 1 : courbe représentative de la fonction f

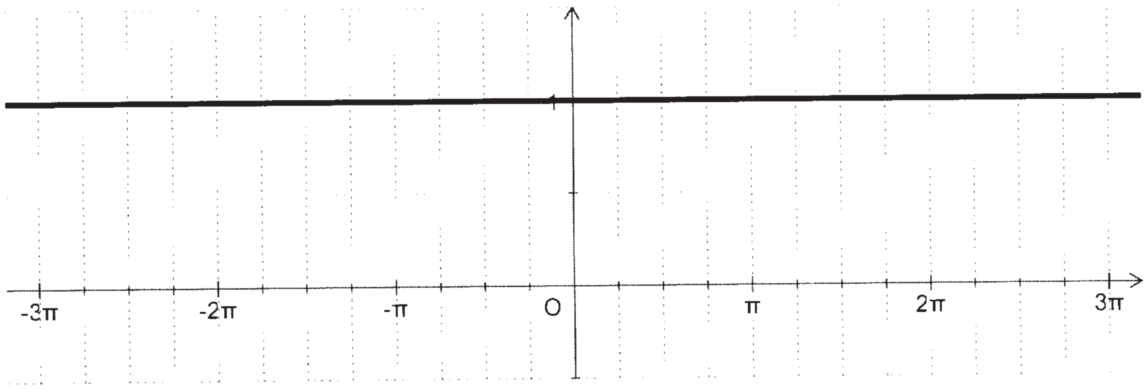


Figure 2 : courbe représentative de la fonction g

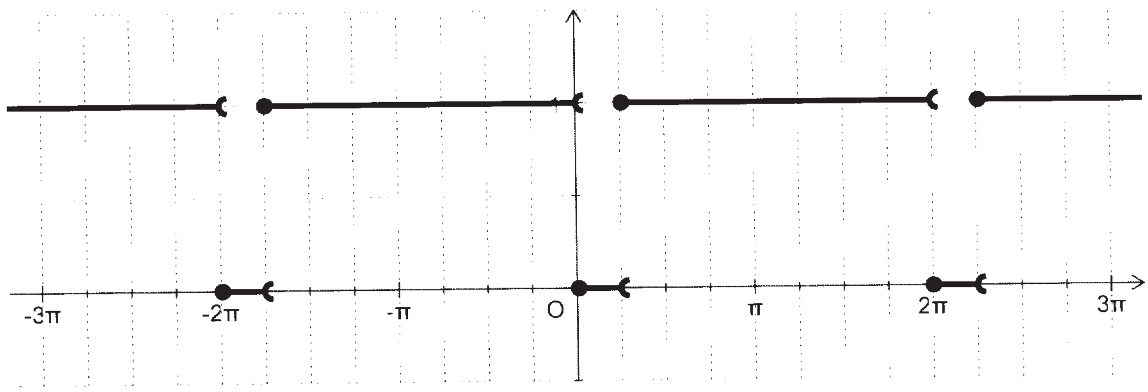
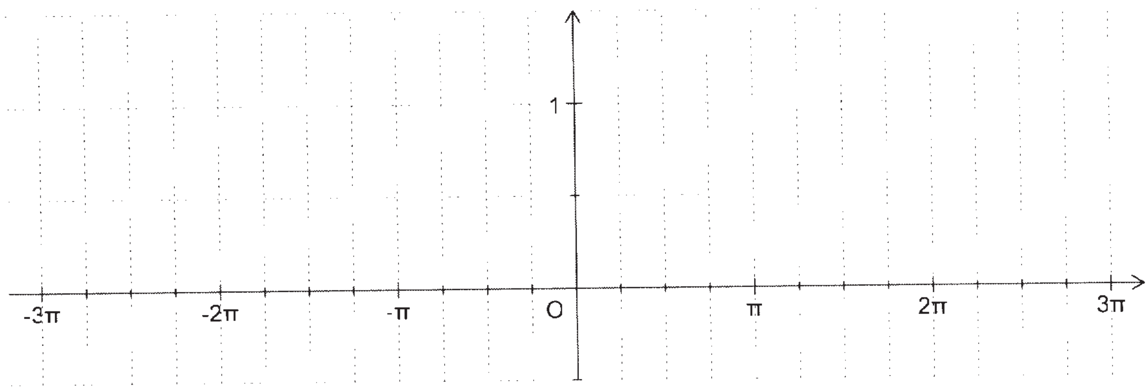


Figure 3 : courbe représentative de la fonction h



Document réponse n°2, à rendre avec la copie (exercice 1)

Tableau 1

n	0	1	2	3	4	5	6	7
A_n	0,12500	0,17227		0,13863		0,08318	0,05305	0,02461

n	8	9	10	11	12	13	14	15
A_n		0,01914	0,03183	0,03781		0,03199	0,02274	0,01148

Tableau 2

n	0	1	2	3	4	5	6	7
B_n		0,14334		0,06200	0,03952	0,02390	0,01287	0,00516

n	8	9	10	11	12	13	14	15
B_n	0,00000	0,00315	0,00472	0,00511		0,00367	0,00242	0,00114

Figure 4

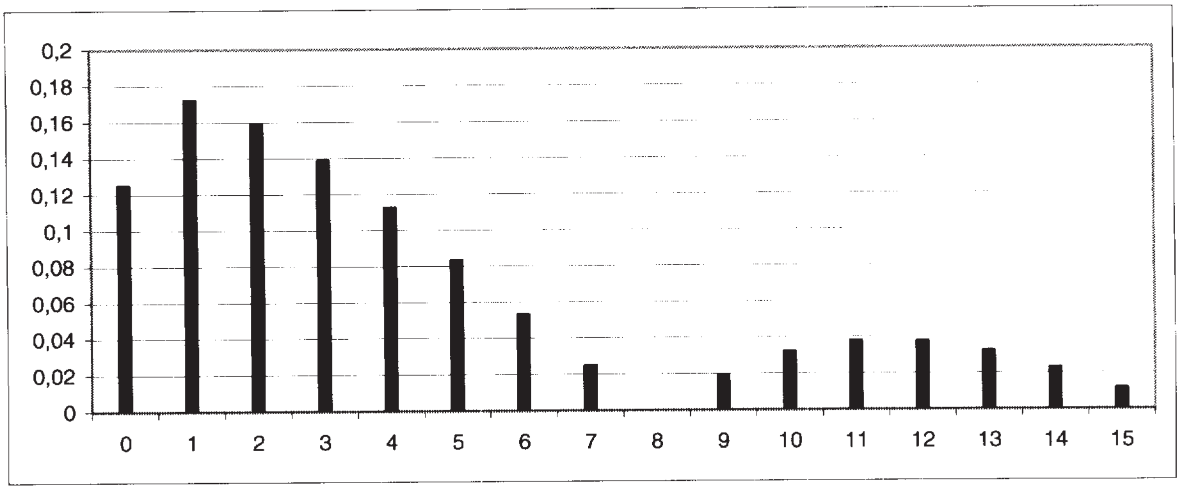
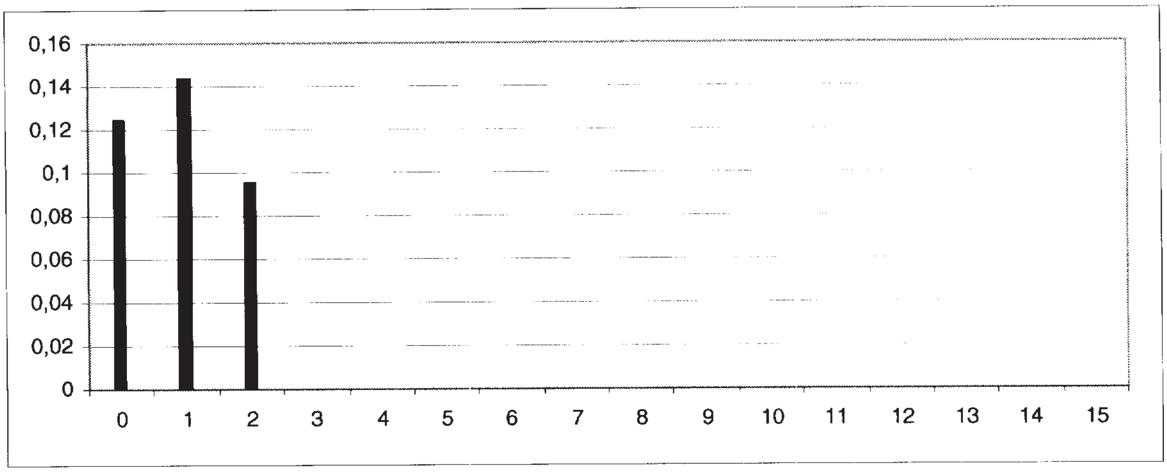


Figure 5



Document réponse n°3, à rendre avec la copie (exercice 2)