SESSION 2007

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

SPECIALITE	Coef.	Durée
TECHNIQUES PHYSIQUES POUR L'INDUSTRIE ET LE LABORATOIRE	3	3

MATHEMATIQUES

Le sujet comprend 6 pages, numérotées de 1 à 6.
La page 6 est à rendre avec la copie.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 7 pages, numérotées de 1 à 7.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

Code sujet
MATGRA2

Exercice 1 (12 *points*)

On s'intéresse à un système entrée-sortie susceptible d'être contrôlé.
Dans la partie A, on étudie le système en l'absence de contrôle.
Dans la partie B, on étudie le système soumis à un contrôle.
Les parties A, B et C sont indépendantes dans leurs résolutions respectives.

Partie A

On considère l'équation différentielle (E_1) suivante :

$$\frac{1}{2}y'(t)+y(t)=10-\beta \qquad (E_1)$$

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle t et β une constante réelle.

1. Montrer que la fonction h définie pour tout nombre réel t par $h(t)=10-\beta$ est solution de l'équation différentielle (E_1).

2. Résoudre l'équation différentielle (E_1).

3. Montrer que la fonction f, solution de l'équation différentielle (E_1) et qui vérifie $f(0)=10$ est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t)=\beta e^{-2t}+10-\beta$.

4. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ que l'on note f_∞.

Partie B

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\begin{cases} U(t)=0 & \text{si } t<0 \\ U(t)=1 & \text{si } t\geq 0 \end{cases}$$

et qu'une fonction définie sur $\mathbf{R}$ est dite causale si elle est nulle pour tout nombre réel strictement négatif.

On considère la fonction causale g qui vérifie la relation (E_2) suivante :

$$\frac{1}{2}g'(t)+g(t)=13\int_0^t [10U(u)-g(u)]\mathrm{d}u+(10-\beta)\,U(t) \qquad (E_2)$$

et la condition $g(0)=10$.

On admet que la fonction g admet une transformée de Laplace notée G.

1. Montrer que la transformée de Laplace I de la fonction i définie par :

$$i(t)=13\int_0^t [10U(u)-g(u)]\mathrm{d}u$$

est telle que :

$$I(p)=\frac{130}{p^2}-13\frac{G(p)}{p}.$$

2. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de la relation (E_2), déterminer une expression de $G(p)$.

3. Vérifier que : $G(p)=\dfrac{10}{p}-\dfrac{2\beta}{(p+1)^2+5^2}$.

4. Dans cette question, on va déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)$, que l'on note g_∞ et qui est la valeur finale du signal représenté par la fonction g.
On rappelle que, d'après le théorème de la valeur finale, $g_\infty = \lim\limits_{p\to 0^+} pG(p)$.
Déterminer g_∞.

5. **a)** Déterminer la transformée de Laplace de la fonction qui à tout nombre réel t associe $e^{-t}\sin(5t)U(t)$.

   b) En déduire l'expression de $g(t)$.

Partie C

Dans cette partie, on prend $\beta = 5$.

En **annexe 1, à rendre avec la copie**, on a représenté, sur l'intervalle $[0;+\infty[$, les courbes C_f et C_g représentatives des fonctions f et g définies dans les parties A et B avec $\beta = 5$.
On admet ici que pour tout nombre réel t positif ou nul : $f(t)=5\mathrm{e}^{-2t}+5$ et $g(t)=10-2\mathrm{e}^{-t}\sin(5t)$.
On rappelle que f_∞ et g_∞ sont les limites respectives des fonctions f et g en $+\infty$.
On a donc : $f_\infty = 5$ et $g_\infty = 10$.

1. **a)** Vérifier que pour tout nombre réel t positif ou nul on a : $\dfrac{f(t)-f_\infty}{f_\infty}=\mathrm{e}^{-2t}$.

   b) Soit t_1 le nombre réel tel que :
$$\frac{f(t)-f_\infty}{f_\infty}\leq 0{,}02 \qquad \text{pour tout } t \geq t_1.$$
   Calculer la valeur exacte de t_1, puis une valeur approchée de t_1, arrondie au dixième.

2. Soit t_2 le nombre réel tel que :
$$-0{,}02 \leq \frac{g(t)-g_\infty}{g_\infty} \leq 0{,}02 \qquad \text{pour tout } t \geq t_2.$$
   Graphiquement, déterminer une valeur approchée de t_2, arrondie au dixième.

Dans ce problème, on a étudié un système entrée-sortie, dans la partie A libre de tout asservissement, puis dans la partie B contrôlé par une commande intégrale.
On a montré que grâce à cette commande on peut stabiliser la sortie à la valeur 10 indépendamment de la perturbation β, au prix d'une détérioration du temps de réponse du système et de l'apparition d'oscillations amorties.

Exercice 2 (8 *points*)

Les parties A et B peuvent être traitées de **manière indépendante**.

Le fournisseur d'accès Internet Mathoile propose des abonnements comportant la fourniture d'un modem ADSL. On appelle p la proportion de modems défectueux parmi ceux fournis aux clients. Dans tout l'exercice, on considère que p est aussi la probabilité pour un client donné de recevoir un modem défectueux.

Une association de consommateurs lance une enquête auprès des abonnés à sa revue pour estimer leur degré de satisfaction concernant leur abonnement ADSL. On appelle p' la proportion de modems défectueux parmi ceux qui ont été fournis aux abonnés à la revue, clients de Mathoile.

Partie A : estimation de p'

Parmi les réponses à l'enquête reçues par l'association, 428 concernent des abonnés, clients du fournisseur d'accès Mathoile. Sur ces 428 abonnés, 86 déclarent avoir reçu un modem défectueux.

1. On note f_e la proportion de modems défectueux chez les abonnés, également clients de Mathoile, ayant répondu à l'enquête.
Donner la valeur exacte de f_e, puis sa valeur arrondie au centième.

2. Soit F la variable aléatoire qui, à un lot de n modems, pris au hasard parmi ceux fournis par Mathoile dans la population des abonnés à la revue, associe la fréquence d'appareils défectueux.

On peut admettre, n étant assez grand, que la variable aléatoire F suit une loi normale de moyenne p' et d'écart type $\sigma = \sqrt{\dfrac{p'(1-p')}{n}}$.

Dans cette situation, l'écart type σ de la variable aléatoire F peut être approché par $\sqrt{\dfrac{f_e(1-f_e)}{428}}$.

Les responsables de la revue font le raisonnement suivant : « le grand nombre de réponses reçues à notre enquête par les abonnés à notre revue, clients de Mathoile, est un échantillon pris au hasard dans l'ensemble de nos abonnés qui ont reçu un modem Mathoile». Dans cette hypothèse, déterminer un intervalle de confiance de p' avec un coefficient de confiance de 0,95.

Partie B : test de validité d'hypothèse

Le fournisseur d'accès Mathoile réfute que l'estimation de la proportion p' de modems défectueux obtenue dans la partie A puisse s'appliquer à l'ensemble de sa production.
Il considère en effet que l'échantillon des personnes qui ont répondu à l'enquête n'est pas représentatif de sa clientèle.
Ce fournisseur contacte alors un organisme indépendant qui procède à son tour à une enquête en interrogeant 400 clients Mathoile choisis de manière aléatoire.

On appelle G la variable aléatoire qui, à un échantillon de 400 modems, associe la fréquence d'appareils défectueux dans cet échantillon. À partir de cette enquête, on souhaite tester, au seuil de 5%, l'hypothèse nulle H_0 : « la probabilité p est égale à 0,16 » contre l'hypothèse alternative H_1 : « la probabilité p est inférieure à 0,16 ».

1. On peut supposer, **sous l'hypothèse nulle**, que G suit une loi normale de moyenne 0,16 et d'écart type $s = \sqrt{\dfrac{0{,}16(1-0{,}16)}{400}}$.

Soit a le nombre réel a tel que : $P(G < 0{,}16 - a) = 0{,}05$.

Montrer qu'une valeur arrondie à 10^{-3} du nombre a est égale à 0,030.

2. Énoncer la règle de décision du test.

3. Sur 400 personnes interrogées, 48 déclarent avoir reçu un modem défectueux. Quelle est la conclusion du test ?

L'estimation de la partie A repose sur un échantillon non aléatoire et, sans doute, pas représentatif des clients du fournisseur Mathoile.
En revanche, dans la partie B, la méthodologie de construction du test est acceptable.

Annexe 1

Document-réponse à rendre avec la copie