SESSION 2010

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

SPÉCIALITÉ	COEF.	DURÉE
INFORMATIQUE ET RÉSEAUX POUR L'INDUSTRIE ET LES SERVICES TECHNIQUES	3	3

MATHÉMATIQUES

Le sujet comprend 7 pages, numérotées de 1 à 7.
Les pages 6 et 7 sont à rendre avec la copie.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 7 pages, numérotées de 1 à 7.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

Code sujet
MATGRA2

Exercice 1 (10 *points*)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On rappelle qu'une courbe de Bézier associée à $n+1$ points de contrôle successifs A_i, $0 \le i \le n$, est l'ensemble des points $M(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\ \overrightarrow{OA_i} \quad \text{où} \quad B_{i,n}(t) = C_n^i\, t^i (1-t)^{n-i} \text{ avec } t \in [0;1].$$

Partie A

L'objectif de cette partie est d'étudier la courbe de Bézier $\mathscr{C}_1$ associée aux quatre points de contrôle successifs $A(4;0)$, $S(12;6)$, $R(0;6)$ et $O(0;0)$.

1. Développer, réduire et ordonner le polynôme $B_{2,3}(t)$.

2. On admet que :

$$B_{0,3}(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1$$
$$B_{1,3}(t) = 3t^3 - 6t^2 + 3t$$
$$B_{3,3}(t) = t^3.$$

Montrer que les coordonnées du point $M(t)$ de la courbe $\mathscr{C}_1$ sont :

$$\begin{cases} x = f_1(t) = 32t^3 - 60t^2 + 24t + 4 \\ y = g_1(t) = -18t^2 + 18t \end{cases} \quad \text{pour } t \in [0;1].$$

3. En utilisant la courbe $\mathscr{C}_1$ tracée sur le **document réponse n°1**, compléter le tableau des variations conjointes des deux fonctions f_1 et g_1 figurant sur ce même document réponse.

4. Calculer la dérivée de la fonction g_1.
En déduire la valeur t_1 du paramètre t pour laquelle l'ordonnée du point $M(t)$ est maximale.

5. Déterminer la valeur t_0 du paramètre t pour laquelle l'abscisse du point $M(t)$ est maximale.

6. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AS}$ est tangent à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point A.

Partie B

On désigne par a un nombre réel.

On souhaite compléter la figure du **document réponse n°1** avec une courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$ en respectant les contraintes suivantes :

- les points de contrôle successifs de la courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$ sont $\mathrm{O}(0;0)$, $\mathrm{E}(0;a)$, $\mathrm{F}\left(\frac{4}{3};-2\right)$ et $\mathrm{A}(4;0)$;
- la courbe $\mathscr{C}_2$ passe par le point $\mathrm{G}\left(1;-\frac{3}{2}\right)$ pour la valeur $\frac{1}{2}$ du paramètre t.

Sous ce système de contraintes, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont des tangentes communes aux points A *et* O.

1. Dans les conditions énoncées ci-dessus, la représentation paramétrique de la courbe $\mathscr{C}_2$ est de la forme :

$$\begin{cases} x = f_2(t) = 4t^2 \\ y = g_2(t) = 3(a+2)\,t^3 - 6(a+1)\,t^2 + 3at \end{cases} \qquad t \in [0;1].$$

Montrer que $a = -2$.

2. Pour chaque valeur de t, l'algorithme de construction par barycentres successifs (appelé algorithme de De Casteljau), permet de construire le point de paramètre t de la courbe de Bézier.

Utiliser cet algorithme, pour la valeur $\frac{1}{2}$ du paramètre t, pour retrouver graphiquement la position du point G.

Laisser apparentes les étapes de la construction.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_2$ sur le **document réponse n°1**.

Exercice 2 (10 *points*)

On considère un système physique dont l'état est modélisé par la fonction y de la variable réelle t, solution de l'équation différentielle :

$$y''(t)+4y(t)=e(t) \qquad \textbf{(1)},$$

où la fonction e représente une contrainte extérieure au système.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que $e(t)=20$ pour tout nombre réel t.
L'équation différentielle (1) s'écrit alors sous la forme :

$$y''(t)+4y(t)=20 \qquad \textbf{(2)}.$$

1. Déterminer la fonction constante h solution particulière de l'équation différentielle **(2)**.

2. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle **(2)**.

3. En déduire l'expression de la fonction f solution de l'équation différentielle **(2)** qui vérifie les conditions $f(0)=0$ et $f'(0)=0$.

Partie B

Dans cette partie, on étudie un moyen d'amener le système vers un état d'équilibre de manière « lisse ».
À cette fin, on soumet le système à une contrainte extérieure modélisée par la fonction e définie par :

$$e(t)=8tU(t)-8(t-\tau)U(t-\tau),$$

où τ désigne un nombre réel strictement positif.

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\begin{cases} U(t)=0 & \text{si } t<0 \\ U(t)=1 & \text{si } t\geq 0 \end{cases}.$$

Une fonction définie sur **R** est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

On appelle g la fonction causale telle que :

$$g''(t)+4g(t)=e(t)$$

et vérifiant :

$$g(0)=0 \text{ et } g'(0)=0.$$

On note $G(p)$ la transformée de Laplace de la fonction g et $E(p)$ la transformée de Laplace de la fonction e.

1. Exprimer $E(p)$ en fonction de p et de τ.

2. En déduire que :

$$G(p)=\frac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}\left(1-\mathrm{e}^{-\tau p}\right).$$

3. Déterminer les constantes réelles A et B telles que :

$$\frac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}=\frac{A}{p^2}+\frac{B}{p^2+4}.$$

4. Déterminer alors l'original de $\dfrac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}$.

5. En déduire que, pour tout nombre réel t :

$$g(t)=g_0(t)-g_0(t-\tau) \qquad \text{avec } g_0(t)=\left(2t-\sin(2t)\right)U(t).$$

6. Montrer que pour $t \geq \tau$, on a :

$$g(t)=2\tau-\sin(2t)+\sin(2t-2\tau).$$

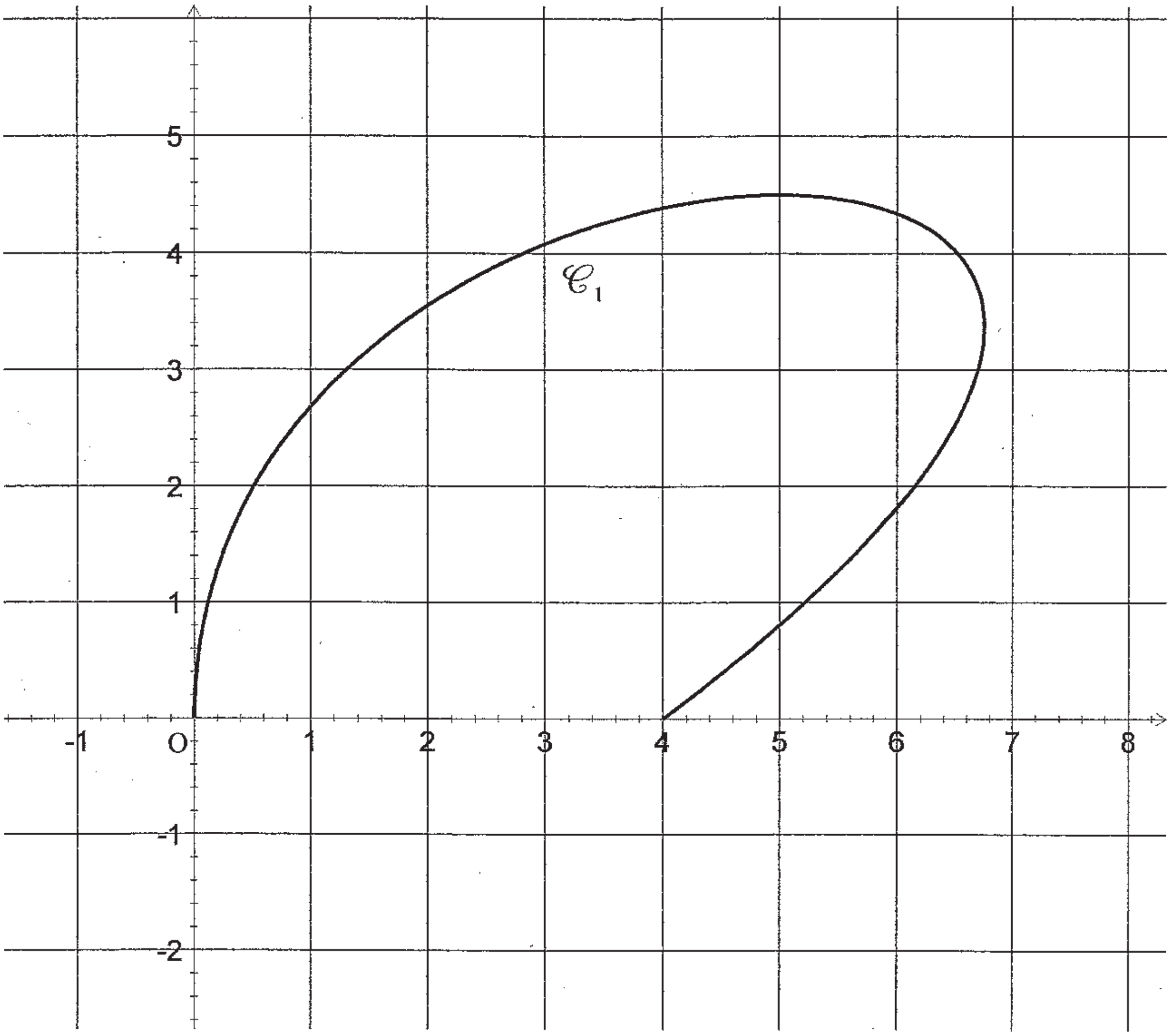
7. On suppose maintenant que $\tau=\pi$.

a) Simplifier l'expression de $g(t)$ pour $t \geq \tau$.

b) La courbe représentative de la fonction e, pour $\tau=\pi$, est tracée sur la figure du **document réponse n°2.**

Sur le même graphique, tracer la courbe représentative de la fonction g.

Document réponse n°1, à rendre avec la copie (exercice 1)



t	0		t_0		t_1		1
$f_1'(t)$		+	0		–		0
$g_1'(t)$							
$f_1(t)$							
$g_1(t)$							

Document réponse n°2, à rendre avec la copie (exercice 2)