Session 2009

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SOUS ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

GROUPEMENT D

Durée : 2 heures

Spécialité	Coefficient
Analyses de biologie médicale	1
Bioanalyses et contrôles	2
Biotechnologies	1,5
Hygiène Propreté Environnement	2
Métiers de l'eau	1,5
Peintures, encre et adhésifs	2
Industries Plastiques à Référentiel Commun Européen – Europlastic	1,5
Qualité dans les industries alimentaires et les bio-industries	2

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.
La calculatrice (conforme à la circulaire n°99-186 du 16-11-99) est autorisée.

Le formulaire de mathématiques est joint au sujet.
Une feuille de papier millimétrée est fournie.

Ce sujet comporte 5 pages (y compris celle-ci)

EXERCICE 1 (9 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Un industriel fabrique des tuyaux en PVC destinés à l'évacuation des eaux sanitaires des habitations.

A. Loi binomiale et approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

1° On s'intéresse à une livraison importante de tuyaux en PVC pour un grand groupe du secteur de la construction.
On note E l'événement : « un tuyau prélevé au hasard dans la livraison est défectueux ».
On suppose que $P(E) = 0{,}015$.
On prélève au hasard 20 tuyaux dans la livraison pour vérification. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 tuyaux.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de tuyaux défectueux de ce prélèvement.

a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

b) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucun des tuyaux ne soit défectueux.

c) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, deux tuyaux au plus soient défectueux.

2° Les tuyaux sont expédiés dans les dépôts régionaux par lots de 200.
On prélève au hasard 200 tuyaux pour vérification dans un stock important. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 200 tuyaux.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 200 tuyaux, associe le nombre de tuyaux de ce prélèvement qui sont défectueux.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres 200 et 0,015.

a) On considère que la loi de Y peut être approchée par une loi de Poisson.
Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

b) On désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ a la valeur obtenue au a).
Calculer $P(Z \leq 4)$.

B. Loi normale

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

Dans cette partie on s'intéresse au diamètre extérieur des tuyaux, exprimé en millimètres.

1° On note D_1 la variable aléatoire qui, à tout tuyau prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe son diamètre extérieur.
On suppose que la variable aléatoire D_1 suit la loi normale de moyenne 40 et d'écart type 0,2.
Un tuyau ne peut être commercialisé que lorsque son diamètre extérieur est compris entre 39,6 mm et 40,4 mm.
Calculer la probabilité qu'un tuyau prélevé au hasard dans la production de la journée soit commercialisable.

2° L'entreprise désire améliorer la qualité de la fabrication des tuyaux : il est envisagé de modifier le réglage des machines produisant les tuyaux.
On note D_2 la variable aléatoire qui, à chaque tuyau prélevé au hasard dans la production journalière future, associera son diamètre. On suppose que la variable aléatoire D_2 suit une loi normale de moyenne 40 et d'écart type σ.
Déterminer σ pour que la probabilité qu'un tuyau prélevé au hasard dans la production journalière future puisse être commercialisable soit égale à 0,99.

EXERCICE 2 (11 points)

Les deux parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $2y' + y = 8\,e^{-0,5t}$,
où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

1° Déterminer les solutions sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$2y' + y = 0.$$

2° Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(t) = 4\,t\,e^{-0,5\,t}$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$.

B. Étude d'une fonction et calcul intégral

Soit f la fonction définie sur $[0, 15]$ par $f(t) = (4t + 1)\,e^{-0,5\,t}$.

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.
Unités graphiques : 1cm sur l'axe des abscisses, 4 cm sur l'axe des ordonnées.

1° On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
On admet que, pour tout nombre réel t de $[0, 15]$, $f'(t) = (3,5 - 2t)\,e^{-0,5\,t}$.
Ce résultat n'a pas à être démontré.

a) Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0, 15]$.

b) Établir alors le tableau de variation de f.

2° Tracer la courbe C sur une feuille de papier millimétré.

3° Soit F la fonction définie sur [0, 15] par :

$$F(t) = (-18 - 8t)\, e^{-0,5\,t}.$$

a) Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur [0, 15].

b) On note $I = \int_0^{11} f(t)\, dt$.

Démontrer que $I = 18 - 106\, e^{-5,5}$.

C. Application des parties A et B

Dans une usine, on se propose de tester un nouveau modèle de hotte aspirante pour les laboratoires.
Avant de lancer la fabrication en série, on a réalisé l'expérience suivante avec un prototype : dans un local clos de volume 500 m ^{3}, équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant.
Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minutes.
À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche. Les mesures réalisées permettent d'admettre qu'au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte, avec $0 \leq t \leq 15$, le volume de dioxyde de carbone, exprimé en m ^{3}, contenu dans le local est $f(t)$, où f est la fonction définie dans la partie B.

1° Déterminer le volume de dioxyde de carbone, en m ^{3}, présent dans le local au moment de la mise en marche de la hotte aspirante.

2° L'atmosphère « ordinaire » contient 0,035 % de dioxyde de carbone, ce qui correspond pour le local où a été réalisé l'expérience à un volume de 0,175 m^3 de dioxyde de carbone.
À l'aide d'une lecture graphique sur la figure réalisée à la question B.2°, déterminer au bout de combien de temps de fonctionnement de la hotte aspirante l'atmosphère dans le local clos contenait un volume de dioxyde de carbone inférieur ou égal à 0,175 m ^{3}.

3° Calculer le volume moyen V_m de dioxyde de carbone présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante. Donner la valeur exacte de V_m puis la valeur approchée de V_m arrondie à 10^{-1}.
La formule donnant la valeur moyenne d'une fonction est dans le formulaire ci-joint.