BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
INFORMATIQUE DE GESTION

Options : - Développeur d'applications
- Administrateur de réseaux locaux d'entreprise

SESSION 2010

SUJET

ÉPREUVE EF2 – MATHÉMATIQUES II

Durée : 1 heure **coefficient : 1**

Calculatrice autorisée, *conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 :*
« Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante, sont autorisées.
Les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits ».

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet. Il comprend :

- **2 pages numérotées de la page 1/2 à 2/2.**
- **le formulaire de mathématiques composé de 4 pages.**

Exercice 1 (11 points).
Les questions 1) et 2) peuvent être traitées de manière indépendante.

1) On considère l'équation différentielle notée (E_1) : $y' + y = -e^{-x}$ où y est une fonction définie et dérivable sur l'ensemble **R** des nombres réels.
   a. Résoudre l'équation différentielle notée (E_0) : $y' + y = 0$.
   b. Démontrer que la fonction g définie pour tout nombre réel x par $g(x) = -x\,e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E_1).
   c. Déduire des questions précédentes la solution générale de l'équation différentielle (E_1).
   d. Déterminer la solution particulière h de l'équation différentielle (E_1) telle que $h(1) = 0$.

2) On note f la fonction définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = (1 - x)e^{-x}$ et u la fonction définie pour tout nombre réel x par $u(x) = e^{-x}$.
   a. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction u.
   b. En déduire un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f.

3) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan et $\mathscr{T}$ la tangente à $\mathscr{C}$ en son point A d'abscisse 0.
   a. Déduire de ce qui précède une équation de la droite $\mathscr{T}$.
   b. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}$ au voisinage du point A.

Exercice 2 (9 points).
Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.
Une usine fabrique des ampoules électriques dont la puissance indiquée est 20W.

Première partie
Pour vérifier la conformité des ampoules fabriquées, on prélève au hasard un échantillon de 25 ampoules dans la production d'une journée. On admettra que la quantité d'ampoules produites en une journée est suffisante pour que l'on puisse considérer ce prélèvement comme un prélèvement avec remise. La moyenne de l'échantillon est $\overline{x} = 20{,}12$ W avec un écart-type $s = 0{,}49$ W.

1) Donner une estimation ponctuelle de la puissance moyenne m et de l'écart-type σ de l'ensemble de la production. (on arrondira à 0,01 près si nécessaire).
2) On suppose que la variable aléatoire $\overline{X}$ qui, à tout échantillon de 25 ampoules, associe sa puissance moyenne, suit la loi normale de moyenne m et d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{25}}$. Déterminer un intervalle de confiance de la moyenne m avec le coefficient de confiance de 95 %.

Deuxième partie
On admet d'autre part, que la variable aléatoire T qui, à une ampoule choisie au hasard dans le stock, associe sa durée de vie en heures suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000125$.

1) Déterminer le temps moyen de bon fonctionnement d'une ampoule.
2) Calculer la probabilité qu'une ampoule soit encore en état de marche au bout de 10000 heures. On donnera le résultat arrondi au millième.
3) Calculer la probabilité qu'une ampoule tombe en panne avant 5000 heures. On donnera le résultat arrondi au millième.