Olympiades académiques de mathématiques

Académie d'Aix-Marseille

Mercredi 13 mars 2019

Série ES, L et technologiques

Les calculatrices sont autorisées, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercices académiques

Cette sous-épreuve comporte deux exercices, à traiter dans le temps imparti.

Pour chaque binôme une seule copie est à rendre, avec le nom des deux élèves ayant composé.

Durée de la composition : 2 heures

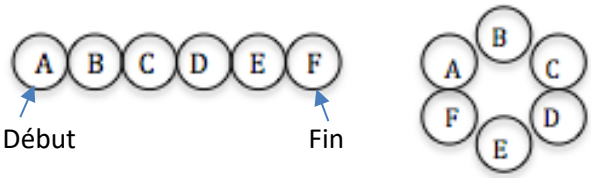
Ce sujet comporte 5 pages dont celle-ci.

Exercice 1 : Les colliers de Louise

Partie 1 :

Pour son anniversaire, Louise a reçu un coffret de perles. Il contient 8 types de perles différents en grande quantité. On notera A, B, C, D, E, F, G, H les 8 types de perles différents. Elle réalise des bracelets de 6 perles.

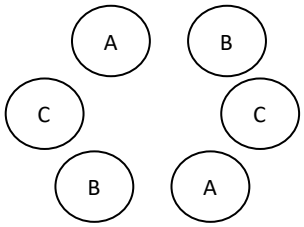
Lorsqu'elle referme le bracelet, on ne voit plus le fermoir et elle se rend compte que plusieurs enfilements différents peuvent donner exactement le même bracelet.
Ci-contre, un bracelet obtenu avec un enfilement.



1) Donner un exemple de deux enfilements différents donnant le même bracelet.

2) Combien d'enfilements sont possibles avec 6 perles de types différents (par exemple A, B, C, D, E et F) ?

3) Combien d'enfilements différents permettent de réaliser le bracelet suivant :



4) Proposer un bracelet qui peut être réalisé par exactement 3 enfilements différents.

5) Elle réalise maintenant des enfilements de 6 perles en les choisissant une à une **au hasard** dans la boîte.
a. Combien d'enfilements différents peut-elle réaliser ?
b. Quelle est la probabilité que l'enfilement réalisé ne contienne pas deux perles de même type ?

Partie 2 :

Pour Noël, Louise a reçu le « Mega coffret création » contenant 300 types de perles différents, en grande quantité.

1) Elle réalise des enfilements de 50 perles en les choisissant une à une au hasard.
a. Sachant que $3^{50} \approx 7{,}18.10^{23}$, écrire en notation scientifique une valeur approchée du nombre d'enfilements différents qu'elle peut réaliser.
b. Justifier que le calcul suivant donne la probabilité qu'un enfilement ne contienne pas deux perles de même type : $\frac{300}{300} \times \frac{299}{300} \times \ldots \times \frac{251}{300}$
c. Louise pense qu'elle a plus de chances de réaliser un collier avec des perles toutes différentes que de réaliser un collier avec au moins deux perles identiques. Etes-vous d'accord avec Louise ?

2) a. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche en sortie la probabilité qu'un enfilement de 50 perles ne contienne pas deux perles de même type.

```
p prend la valeur 1

  Pour i allant de 1 à ……
    p prend la valeur ……
  Fin Pour

Afficher ……
```

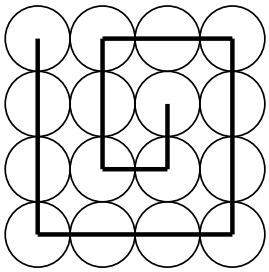
b. Exécuter cet algorithme et donner la valeur affichée en sortie.

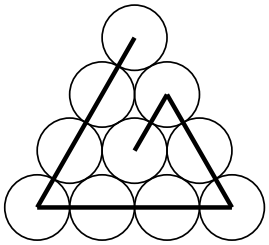
c. Ce résultat confirme-t-il votre opinion à la question 1.c. ?

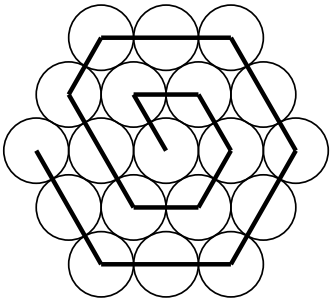
Texas Instruments Animath CASIO Google Crédit Mutuel Enseignant Inria NUMWORKS

Partie 3 :

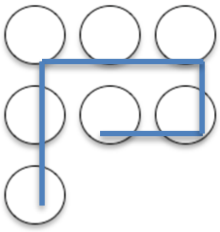
Elle veut maintenant ranger ses colliers dans des boîtes pour les offrir. Elle dispose de boîtes carrées, triangulaires, ou hexagonales. Elle souhaite savoir laquelle choisir pour que ses colliers s'y imbriquent parfaitement.







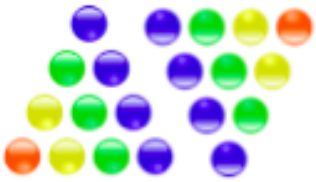
Exemple d'un collier ne s'imbriquant pas parfaitement dans une boîte carrée



1) Louise a déjà enfilé 50 perles pour un collier qu'elle veut offrir à sa mère.
Peut-elle trouver une boîte qui convienne ?
Si non combien de perles au moins doit-elle rajouter pour pouvoir le ranger parfaitement dans l'une des boîtes ?

2) Proposer une formule littérale donnant le nombre de perles que doit comporter un collier pour s'imbriquer parfaitement dans une boîte carrée de côté n.

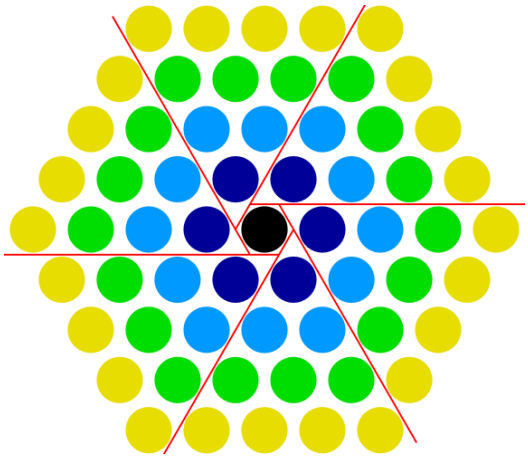
3) A l'aide du tableau et du schéma ci-contre, proposer une formule donnant le nombre de perles que doit comporter un collier pour s'imbriquer parfaitement dans une boîte triangulaire de côté n.



Côté de la boite triangulaire	Nombre de perles
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
……	……

4) Combien de perles comporte le plus petit collier de plus de 500 perles pouvant s'imbriquer parfaitement dans une boîte triangulaire ?

5)



A l'aide du schéma ci-contre, montrer que le nombre de perles que doit comporter un collier pour s'imbriquer parfaitement dans une boîte hexagonale est égal à :

$$S_n = 1 + 6\,\frac{n\,(n-1)}{2}$$

où n est le nombre de « couches » à partir du centre. La couche 1 étant occupée par la perle centrale. Le schéma ci-contre comporte donc 5 couches.

6) Montrer qu'un collier comportant 1027 perles peut s'imbriquer parfaitement dans une boîte hexagonale.

7) Déterminer le collier le plus long contenant moins de 500 perles qui pourrait s'imbriquer parfaitement dans l'une des boîtes.

8) Proposer un collier de plus de 3 perles pouvant s'imbriquer parfaitement à la fois dans une boîte hexagonale et dans une boîte triangulaire.

Texas Instruments Animath CASIO Google Crédit Mutuel Enseignant Inria NUMWORKS

Exercice 2 : Pierre, feuille, ciseaux

Pierre-Feuille-Ciseaux est un jeu où deux joueurs font simultanément une figure avec leurs mains : une pierre, une feuille ou des ciseaux. La pierre gagne contre les ciseaux, les ciseaux gagnent contre la feuille, la feuille gagne contre la pierre.

Dans cet exercice, vous cherchez à programmer un robot qui va affronter un autre robot dans une partie de pierre-feuille-ciseaux. Le robot adverse utilise des stratégies différentes, et vous devrez trouver la meilleure stratégie pour jouer contre lui.

On dira qu'une stratégie est meilleure qu'une autre si elle donne une meilleure probabilité de gagner, et en cas d'égalité, une plus faible probabilité de perdre.

Notations à respecter dans cet exercice :
On notera P, respectivement F, respectivement C les événements : le robot adverse joue Pierre, Feuille ou Ciseaux.
On notera p, respectivement f, respectivement c les événements : votre robot joue pierre, feuille ou ciseaux.
Les événements V, D, N correspondent aux résultats d'une manche : Victoire de votre robot, Défaite de votre robot, ou match Nul.
Si une partie est constituée de plusieurs manches, on notera par exemple V_n l'événement : « votre robot gagne la n-ième manche ».

1. **Séquence répétée**
   Le robot adverse a été programmé pour jouer systématiquement la séquence PFCPFCPFC… Il a joué P au coup précédent. Vous pouvez programmer les trois coups suivants. Quelle séquence programmez-vous ?

2. **Jeu au hasard**
   Le robot adverse a été programmé pour jouer au hasard l'une des trois figures, de manière équiprobable.

   a. Vous programmez votre robot de la même manière. Calculer la probabilité que votre robot gagne la partie.

   b. Vous pouvez programmer les probabilités p_1 et p_2 avec lesquelles votre robot doit jouer p ou f.
   Quel calcul doit effectuer votre robot pour connaître la probabilité p_3 avec laquelle il doit jouer c ?

   c. Montrer que quelles que soient les probabilités p_1 et p_2 avec lesquelles vous programmez votre robot, la probabilité qu'il gagne la partie reste la même.

3. **Figure préférée**
   Le robot adverse a été programmé pour jouer P avec une probabilité de 1/2, F et C avec une probabilité de 1/4.
   Vous hésitez entre trois stratégies :
   - Stratégie 1 : jouer systématiquement f
   - Stratégie 2 : jouer f avec une probabilité de 1/2, les deux autres figures avec une probabilité de 1/4.
   - Stratégie 3 : jouer au hasard de manière équiprobable l'une des trois figures.

   Quelle est la meilleure de ces trois stratégies ?

4. **Réaction au résultat de la manche précédente**
   Le robot adverse a été programmé pour jouer en fonction du résultat de la manche précédente :
   - S'il a gagné la manche précédente, il rejoue la même figure.
   - S'il a perdu la manche précédente, il joue au hasard l'une des deux figures qu'il n'a pas jouées, de manière équiprobable.
   - S'il a fait match nul lors de la manche précédente, il joue au hasard l'une des trois figures de manière équiprobable.

Texas Instruments Animath CASIO Google Crédit Mutuel Enseignant Inria NUMWORKS

a. On suppose que lors de la manche précédente, le robot adverse a joué P.
Décrire la meilleure stratégie, en expliquant ce que doit jouer votre robot, en fonction du résultat (V, D ou N) de la manche précédente.

b. On suppose que vous avez programmé votre robot pour qu'il applique cette stratégie.
Au premier coup de la partie, les deux robots ont joué au hasard de manière équiprobable l'une des trois figures. Calculer alors la probabilité $p(V_2)$ que votre robot gagne la seconde manche.

5. Algorithme de « Minasi »

Vous pouvez programmer votre robot avec l'algorithme dit de « Minasi » :

- Le robot cherche dans l'historique de la partie les séquences d'une taille donnée similaires à la séquence en cours.
- Il calcule ensuite les fréquences avec lesquelles l'adversaire a joué P, F ou C à l'issue de ces séquences.
- Il fait l'hypothèse que l'adversaire va jouer P, F ou C avec des probabilités égales à ces fréquences et décide alors de jouer le coup qui correspond à la meilleure stratégie.

L'historique de la partie en cours est :

P p C p F c C c F c P f F f P c C p C f C c F c F p P f F c P f F c C c F c

Ce qui veut dire que votre adversaire a joué P et vous p, puis il a joué C et vous p, et ainsi de suite jusqu'à la dernière manche où votre adversaire a joué F et vous c.

a. Séquences de taille 1 (séquence en cours : c).
Dénombrer dans l'historique de la partie ce qu'a joué l'adversaire après que votre robot a joué c.
Que va jouer votre robot si vous le programmez pour qu'il analyse les séquences de taille 1 ?

b. Séquences de taille 2 (séquence en cours : F c).
Dénombrer dans l'historique de la partie ce qu'a joué l'adversaire après que la séquence Fc s'est produite.
Que va jouer votre robot si vous le programmez pour qu'il analyse les séquences de taille 2 ?

c. La plus grande séquence.
Votre robot est programmé pour baser sa décision sur la plus grande séquence similaire à une séquence en cours qui apparait précédemment dans l'historique de la partie.
Que va jouer votre robot ?

Texas Instruments Animath CASIO Google Crédit Mutuel Enseignant Inria NUMWORKS