BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

SESSION 2008

Epreuve de mathématiques

GROUPEMENT B **CODE : *MATGRB2***

Durée : 2 heures

SPECIALITE	COEFFICIENT
Conception et industrialisation en microtechniques	**1,5**

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (12 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = x\,e^{x}$
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur R, et y' la fonction dérivée de y.

1° Déterminer les solutions définies sur R de l'équation différentielle (E_0) :
$$y' - 2y = 0.$$

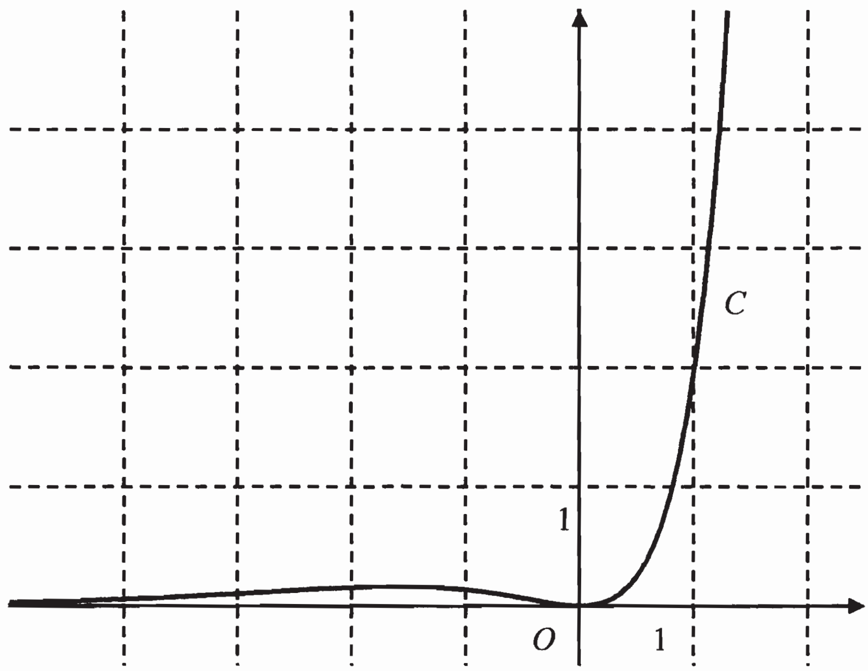
2° Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = (-x - 1)\,e^{x}$.
Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = e^{2x} - (x+1)\,e^{x}$. Sa courbe représentative C est donnée dans un repère orthogonal ci-dessous.



1° a) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = e^x(2e^x - 2 - x)$.

b) En déduire le coefficient directeur $f'(0)$ de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

Interpréter graphiquement ce résultat.

2° a) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto e^{2x}$.

b) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

C. Calcul intégral

1° On note $I = \int_{-0,3}^{0,3} \frac{x^2}{2} \, dx$.

Démontrer que $I = 0{,}009$.

2° On note $J = \int_{-0,3}^{0,3} e^{2x} \, dx$.

Démontrer que $J = 0{,}5\,(e^{0,6} - e^{-0,6})$.

3° On note $K = \int_{-0,3}^{0,3} (x+1)\,e^x \, dx$.

Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $K = 0{,}3\,(e^{0,3} + e^{-0,3})$.

4° On note $L = \int_{-0,3}^{0,3} f(x) \, dx$.

a) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de L.

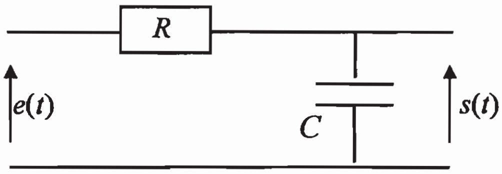
b) Donner la valeur approchée de L arrondie à 10^{-5}.

c) Vérifier que la valeur exacte de I et la valeur approchée de L obtenue à la question précédente diffèrent de $4{,}5 \times 10^{-4}$.

EXERCICE 2 (8 points)

La question 5° de cet exercice peut-être traitée de façon indépendante.

On considère le circuit représenté ci-dessous alimenté à tout instant t par une tension $e(t)$ et on note $s(t)$ la tension aux bornes du condensateur.



L'équation différentielle régissant ce circuit est (1) : $RC\,s'(t) + s(t) = e(t)$

avec $s(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et où s' est la dérivée de la fonction s.

En utilisant la transformation de Laplace, on se propose de rechercher la tension $s(t)$ aux bornes du condensateur dans le cas suivant :

- $e(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - 0{,}1)$, où la fonction $\mathcal{U}$ est la fonction échelon unité définie par $\mathcal{U}(t) = 0$ si $t < 0$ et $\mathcal{U}(t) = 1$ si $t \geq 0$;
- $R = 10\ \Omega$ et $C = 0{,}004$ F.

Pour cela on admet que les fonctions s, s' et e admettent des transformées de Laplace.

On note $E(p) = \mathcal{L}[e(t)]$ et $S(p) = \mathcal{L}[s(t)]$.

1° Sur une feuille de papier millimétré, tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de e sur l'intervalle [0 ; 0,2]. On prendra comme unité 1 cm pour 0,02 sur l'axe des abscisses et 10 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

2° Déterminer $E(p) = \mathcal{L}[e(t)]$.

3° a) En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (1), déterminer une expression de $S(p)$ en supposant que $s(0^+) = 0$.

b) Montrer que $S(p)$ peut s'écrire sous la forme :

$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+25} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+25}\right)e^{-0{,}1\,p}.$$

4° a) Déterminer $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+25}\right]$.

b) En déduire $\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+25}\right)e^{-0{,}1\,p}\right]$.

c) En déduire la tension $s(t) = \mathcal{L}^{-1}[S(p)]$.

5° On admet que si $t \in [0;0{,}1[$, $s(t) = 1 - e^{-25t}$ et si $t \in [0{,}1;+\infty[$, $s(t) = e^{-25t}(e^{2{,}5} - 1)$.

a) Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera des valeurs décimales arrondies à 10^{-2} près).

t	0	0,025	0,05	0,075	0,100	0,125	0,15	0,175	0,2
$s(t)$									

b) Construire une représentation de s sur le même graphique que celle de e.

Formulaire

$$\begin{tikzcd} f(t)\,\mathcal{U}(t) \arrow[r, bend left, "\mathscr{L}"] & F(p) \arrow[l, bend left, "\mathscr{L}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

On rappelle les formules suivantes sur la transformation de Laplace.

$$\mathscr{L}[\lambda f + \mu g] = \lambda \mathscr{L}[f] + \mu \mathscr{L}[g].$$

$$\mathscr{L}[\mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p}.$$

$$\mathscr{L}[e^{-at}\mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p+a}.$$

Plus généralement, si on note $\mathscr{L}[f(t)\,\mathcal{U}(t)] = F(p)$ alors,

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)\,\mathcal{U}(t-\tau)] = F(p)\,e^{-\tau p};$$

$$\mathscr{L}[f(t)\,e^{-at}\,\mathcal{U}(t)] = F(p+a);$$

$$\mathscr{L}[f'(t)\,\mathcal{U}(t)] = p\,F(p) - f(0^+).$$