

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

SESSION 2009

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B

CODE : MATGRB2

Durée : 2 heures

SPECIALITE	COEFFICIENT
Conception et industrialisation en microtechniques	1,5

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

GROUPEMENT B DES BTS	SESSION 2009
Mathématiques	MATGRB2
Durée : 2 heures	Page : 1/5

EXERCICE 1 (12 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 8e^x$.

où y est une fonction de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

2° Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 4x^2 e^x$.

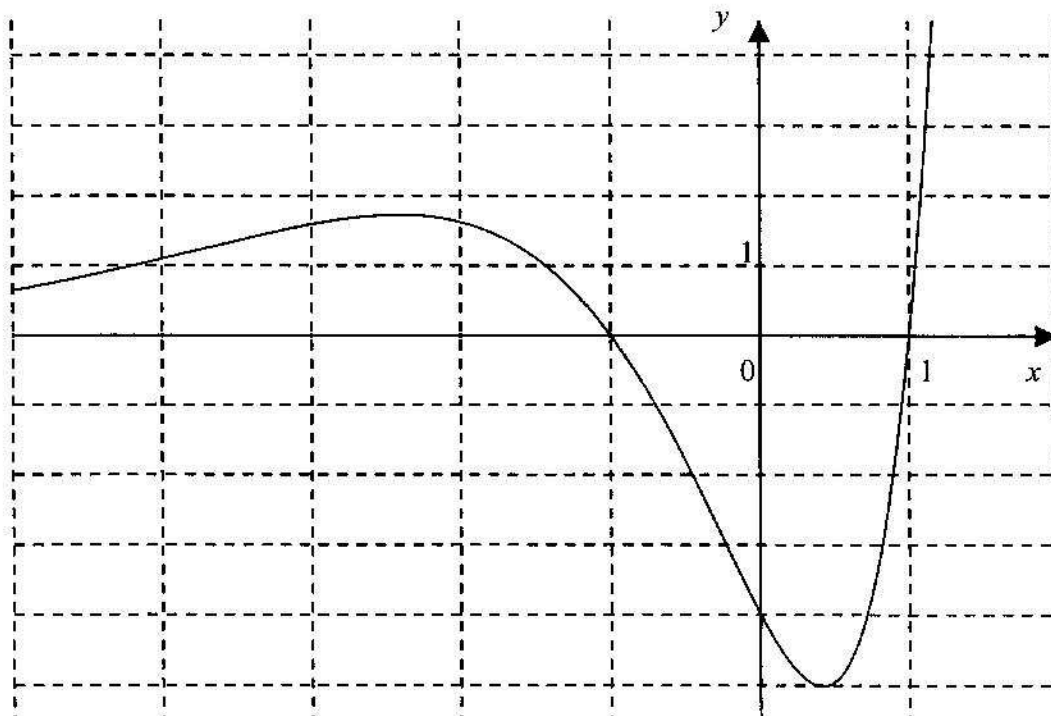
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E) .

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .

4° Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -4$ et $f'(0) = -4$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4x^2 - 4)e^x$. Sa courbe représentative C dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



GROUPEMENT B DES BTS	SESSION 2009
Mathématiques	MATGRB2
Durée : 2 heures	Page : 2/5

- 1° a) Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = 4(x^2 + 2x - 1)e^x$.
 b) Donner sans justification la valeur exacte et la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de l'abscisse de chacun des points de la courbe C où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
- 2° a) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = -4 - 4x + 2x^2 + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.
 b) Dédire du a) une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
 c) Étudier la position relative de C et T au voisinage du point d'abscisse 0.

C. Calcul intégral

Dans cette partie, les questions 1° et 2° peuvent être traitées de façon indépendante.

- 1° La fonction f définie au début de la partie B est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.
 Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -f''(x) + 2f'(x) + 8e^x$.
 En déduire une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- 2° a) Donner, sans justification, le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
 b) Dans cette question, on admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (4x^2 - 8x + 4)e^x$ est une primitive de la fonction f .
 Dédire de ce qui précède l'aire A , en unités d'aire, de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

GROUPEMENT B DES BTS	SESSION 2009
Mathématiques	MATGRB2
Durée : 2 heures	Page : 3/5

EXERCICE 2 (8 points)

On considère un signal correspondant à la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T = 2\pi$ et telle que :

$$f(t) = \pi - t \text{ pour } 0 \leq t < \pi \text{ et } f(t) = 0 \text{ pour } \pi \leq t < 2\pi.$$

Soit $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n \omega t) + b_n \sin(n \omega t))$ le développement en série de Fourier associé à la fonction f .

1° Tracer, dans un repère orthogonal, une représentation graphique de la fonction f , pour t appartenant à l'intervalle $[-2\pi, 6\pi[$.

2° Montrer que $a_0 = \frac{\pi}{4}$.

3° Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les intégrales suivantes, pour n entier non nul :

$$\int_0^{\pi} (\pi - t) \cos(nt) dt = \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \text{ et } \int_0^{\pi} (\pi - t) \sin(nt) dt = \frac{\pi}{n}.$$

Ces résultats sont admis et n'ont donc pas à être démontrés.

En déduire les expressions de a_n et de b_n en fonction de l'entier non nul n .

4° Calcul d'une valeur approchée de la valeur efficace de f

Pour tout entier n , on pose $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ pour $n \geq 1$ et $c_0 = |a_0|$, où a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de la fonction f .

Le tableau suivant donne les valeurs de c_n , arrondies à 10^{-4} , pour n variant de 0 à 5.

n	0	1	2	3	4	5
c_n	0,785 4	1,185 4	0,5	0,340 8	0,25	0,201 6

On note E_f la valeur efficace de la fonction f .

La formule de Parseval permet d'écrire : $(E_f)^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$.

On obtient une valeur approchée de E_f en ne prenant pas en compte les harmoniques d'ordre supérieur ou égal à 6. On obtient alors une valeur approchée P du carré de la valeur efficace de f par la formule : $P = c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=5} c_n^2$.

Donner, en utilisant le tableau ci-dessus, une approximation décimale à 10^{-4} près de P .

GROUPEMENT B DES BTS	SESSION 2009
Mathématiques	MATGRB2
Durée : 2 heures	Page : 4/5

5° Comparaison avec la valeur exacte de la valeur efficace de f

a) On rappelle que $(E_f)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t) dt$.

Montrer que $(E_f)^2 = \frac{\pi^2}{6}$.

b) Dédurre des questions précédentes une valeur approchée arrondie à 10^{-3} du rapport $\frac{P}{(E_f)^2}$.

On peut observer ici que $\frac{P}{(E_f)^2}$ est inférieur à 0,95. On constate ainsi que l'abandon des harmoniques d'ordre supérieur à 5 ne fournit pas une excellente approximation de $(E_f)^2$ dans le cas où, comme ici, les valeurs de c_n ne décroissent pas rapidement.

Formulaire pour les séries de Fourier

f : fonction périodique de période T .

Développement en série de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n \omega t) + b_n \sin(n \omega t)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i k \omega t}, \quad (n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}).$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt ; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos(n \omega t) dt ;$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin(n \omega t) dt.$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-i k \omega t} dt \quad (k \in \mathbb{Z}) ; \quad c_0 = a_0 ;$$

$$\frac{a_n - i b_n}{2} = c_n ; \quad \frac{a_n + i b_n}{2} = c_{-n} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

GROUPEMENT B DES BTS	SESSION 2009
Mathématiques	MATGRB2
Durée : 2 heures	Page : 5/5