BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2010

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B *CODE : MATGRB1*

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉS	COEFFICIENT
Aménagement finition	2
Après-vente automobile	2
Assistance technique d'ingénieur	2
Bâtiment	2
Conception et réalisation de carrosseries	2
Construction navale	2
Constructions métalliques	2,5
Domotique	2
Enveloppe du bâtiment : façade – étanchéité	2
Études et économie de la construction	2
Fluide – énergie – environnement	2
Géologie appliquée	1,5
Industrialisation des produits mécaniques	2
Maintenance et après-vente des engins de travaux publics et de manutention	1
Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques	1
Maintenance industrielle	2
Mécanique et automatismes industriels	2
Moteurs à combustion interne	2
Traitement des matériaux	3
Travaux publics	2

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (12 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = e^x - 2x$
où la fonction inconnue y, de la variable réelle x, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' désigne sa fonction dérivée.

1° Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) :
$$y' - y = 0.$$

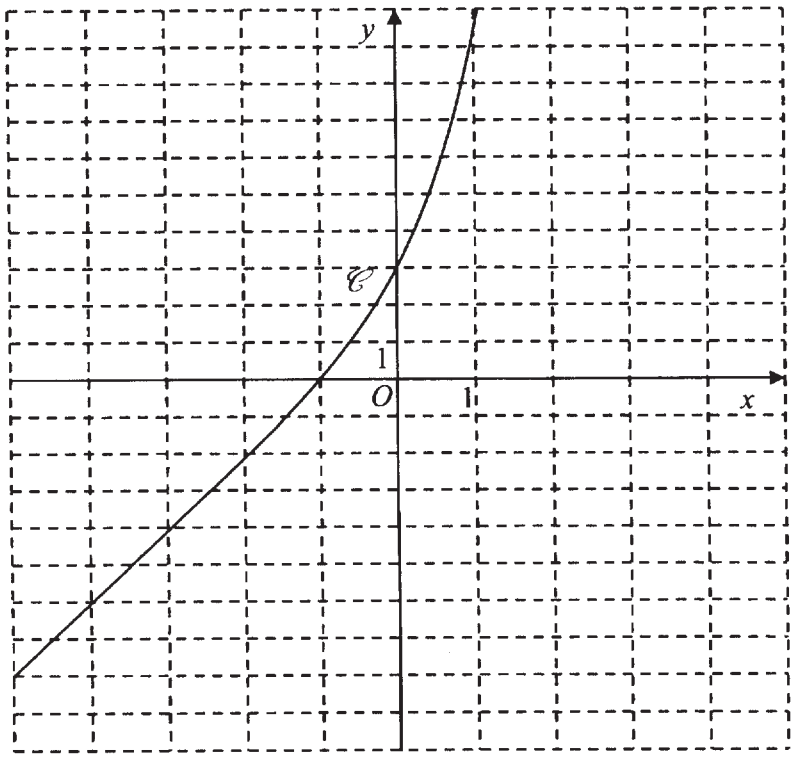
2° Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\,e^x + 2x + 2$.
Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 3$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)\,e^x + 2x + 2$. Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée dans un repère orthogonal ci-dessous.



1° Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2° *Pour cette question, une seule réponse A, B, C est exacte. Indiquer sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $-\infty$ dont une équation est :

Réponse *A*	Réponse *B*	Réponse *C*
$y = x + 1$	$y = 2x + 2$	$y = 2$

3° a) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = 3 + 4x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Pour les question 3°b et 3°c, une seule réponse A, B, C est exacte. Indiquer sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

b) Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :

Réponse *A*	Réponse *B*	Réponse *C*
$y = 3$	$y = 3 + 4x$	$y = \frac{3}{2}x^2$

c) Au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est :

Réponse *A*	Réponse *B*	Réponse *C*
au-dessus de la tangente T pour tout x.	au-dessous de la tangente T pour tout x.	au-dessous de la tangente T quand $x < 0$ et au-dessus quand $x > 0$.

C. Calcul intégral

1° On note $I = \int_{-1}^{1} (2x + 2)\,dx$.

Montrer que $I = 4$.

2° On note $J = \int_{-1}^{1} (x + 1)\,e^x\,dx$.

Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = e + e^{-1}$.

3° a) On note $K = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, où f est la fonction définie dans la partie *B*.

Déduire de ce qui précède la valeur exacte de K.

b) Donner la valeur de K, arrondie à 10^{-2}.

c) On admet que pour tout x de l'intervalle $[-1, 1]$, $f(x) \geq 0$.
Donner une interprétation graphique de K.

EXERCICE 2 (8 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans une usine de conditionnement, une machine remplit à la chaîne des bouteilles d'un certain liquide.

A. Loi binomiale et loi de Poisson

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

On note E l'événement « une bouteille prélevée au hasard dans un stock important est non conforme au cahier des charges ». On suppose que la probabilité de E est 0,02.
On prélève au hasard 30 bouteilles dans le stock pour vérification. On suppose que le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui, à chaque prélèvement de 30 bouteilles, associe le nombre de bouteilles non conformes.

1° a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

b) Calculer $P(X \leq 1)$.

2° On considère que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X peut être approchée par une loi de Poisson.

a) Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

b) On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ a la valeur obtenue au a).
En utilisant cette variable aléatoire, calculer la probabilité que dans un tel prélèvement de 30 bouteilles, au plus une bouteille soit non conforme.

Dans ce qui suit, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

B. Loi normale

Dans cette partie, on considère une grande quantité de bouteilles devant être livrées à des clients. On note Z la variable aléatoire qui, à une bouteille prélevée au hasard dans cette livraison, associe sa contenance en centilitres.
On suppose que Z suit la loi normale de moyenne 70 et d'écart type 1.

1° Calculer $P(68 \leq Z \leq 72)$.

2° Déterminer le nombre réel h positif tel que $P(70 - h \leq Z \leq 70 + h) = 0,99$.

C. Intervalle de confiance

Une chaîne de supermarchés réceptionne un lot important de bouteilles dont elle souhaite estimer la contenance moyenne. On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 bouteilles dans ce lot.

Soit $\overline{C}$ la variable aléatoire qui à tout échantillon de 100 bouteilles ainsi prélevé associe la moyenne des contenances en centilitres des bouteilles de cet échantillon. On suppose que $\overline{C}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{100}}$ avec $\sigma = 1$.

Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue est $\bar{x} = 70{,}12$.

1° Déterminer un intervalle de confiance centré en $\bar{x}$ de la moyenne μ des contenances des bouteilles de ce lot, avec le coefficient de confiance 95 %. (On arrondira les bornes de l'intervalle à 10^{-2}).

2° On considère l'affirmation suivante : « la moyenne μ est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question 1° ».
Cette affirmation est-elle vraie ? (Donner la réponse sans explication).