

# Brevet de Technicien Supérieur Groupement A1

MATHÉMATIQUES

SESSION 2011

SPÉCIALITÉS	COEFF	DURÉE
ÉLECTROTECHNIQUE	2	3
GÉNIE OPTIQUE	3	3

**Matériel autorisé :**

Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique sont autorisées à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

*circulaire 99-186 du 16 novembre 1999*

**Document à rendre avec la copie :**

Document réponse .....page 8/8

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

BTS Groupement A1		Session 2011
Mathématiques	code: MATGRA1	Page : 1/8

# Exercice 1 (10 points)

## Partie A

Une source émet un signal binaire composé de 0 et de 1. Lors du transport, le signal peut être déformé. Un 0 peut être transformé en 1 avec une probabilité 0,1 et, de même, un 1 peut être transformé en 0 avec une probabilité 0,1.

Pour toute la suite, dans une série de chiffres, on lit de gauche à droite, le premier chiffre envoyé étant donc celui écrit le plus à gauche.

On envoie le signal 00.

On admet que les erreurs de transmission sont des événements aléatoires indépendants les uns des autres.

On considère les événements suivants :

- $E_1$  : « les deux chiffres sont modifiés »
- $E_2$  : « le premier chiffre est modifié mais pas le deuxième »
- $E_3$  : « aucun chiffre n'est modifié »
- $E_4$  : « au moins un des chiffres est modifié »

*Pour chaque affirmation, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie.*

*Une bonne réponse rapporte 0,5 point, une réponse incorrecte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.*

1. La probabilité de l'événement  $E_1$  est égale à :

- 0,01
- 0,09
- 0,99
- 0,81

2. Si l'événement  $E_2$  est réalisé, le signal reçu est :

- 00
- 10
- 01
- 11

3. La probabilité de l'événement  $E_2$  est égale à :

- 0,19
- 0,09
- 0,81
- 0,90

BTS Groupement A1		Session 2011
Mathématiques	code: MATGRA1	Page : 2/8

4. La probabilité de l'événement  $E_3$  est égale à :

- 0,01
- 0,09
- 0,99
- 0,81

5. La probabilité de l'événement  $E_4$  est égale à :

- 0,19
- 0,11
- 0,20
- 0,91

## Partie B

1. On considère l'expérience aléatoire consistant à émettre une chaîne constituée de 10 fois le chiffre 1 et à observer la chaîne reçue. On appelle  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque chaîne ainsi reçue, associe le nombre d'erreurs de transmission, c'est-à-dire le nombre de 0 obtenus.

On rappelle que la probabilité qu'un chiffre soit mal transmis est 0,1.

- (a) On admet que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale.  
Préciser les paramètres de cette loi.
- (b) Calculer à 0,001 près la probabilité qu'il y ait exactement une erreur de transmission.
- (c) Montrer que la probabilité qu'il y ait au plus une erreur de transmission est égale à 0,74 à 0,01 près.

2. Estimant que la qualité des transmissions n'est pas assez bonne, les techniciens procèdent à quelques réglages afin de réduire les « bruits » à l'origine des erreurs. La probabilité qu'un chiffre soit mal transmis devrait ainsi être fortement diminuée.

Effectivement, à l'issue des réglages, on constate que la proportion de chiffres mal transmis est égale à 0,002.

- (a) On appelle  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de chiffres mal transmis dans une chaîne de 1000 chiffres.  
On considère que la variable aléatoire  $Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .  
Justifier que  $\lambda = 2$ .
- (b) Calculer à 0,001 près la probabilité qu'il y ait au moins une erreur de transmission parmi les 1000 chiffres envoyés.

## Partie C

La transmission des chiffres binaires est assurée par un signal électrique carré. Les impulsions supérieures à 2 volts représentent le chiffre 1, les autres le chiffre 0. Ne pouvant affiner davantage leurs réglages, les techniciens admettent que les erreurs de transmission restantes sont dues à un « bruit aléatoire ». Celui-ci est modélisé par un signal de tension aléatoire  $U$ , exprimée en volts. On admet que  $U$  suit une loi normale de moyenne 0 et d'écart type  $\sigma$ .

BTS Groupement A1		Session 2011
Mathématiques	code: MATGRA1	Page : 3/8

1. Pour envoyer les chiffres 1, on envoie des impulsions de 4 volts. Ces dernières sont modifiées par le bruit aléatoire. La tension reçue est ainsi égale à  $4 + U$ .

Dans cette question, on suppose que  $\sigma = 0,7$ .

- (a) Montrer que la probabilité que cette tension représente le chiffre 1 est égale à la probabilité que  $U$  soit supérieure à  $-2$ .
- (b) Calculer cette probabilité à 0,001 près.
2. Quelle condition doit-on imposer à l'écart type  $\sigma$  pour que la proportion d'erreurs de transmission d'un chiffre 1 soit inférieure à 0,1%, c'est-à-dire pour que :

$$P(U < -2) < 0,001?$$

*Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète ou non aboutie sera prise en compte.*

BTS Groupement A1		Session 2011
Mathématiques	code: MATGRA1	Page : 4/8

## Exercice 2 ( 10 points)

*Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.*

*Le but de la partie A est de calculer le développement en série de Fourier d'une fonction périodique, puis de s'intéresser à la valeur efficace de cette fonction sur une période.*

*Dans la partie B, il s'agit de retrouver la représentation graphique d'une fonction à partir de son développement en série de Fourier puis de définir cette fonction.*

### Partie A

On considère la fonction  $f$  périodique, de période 2, définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$\begin{cases} f(t) = 0,5t + 0,5 & \text{si } -1 < t < 1 \\ f(1) = 0,5. \end{cases}$$

Le développement en série de Fourier de la fonction  $f$  s'écrit :

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)).$$

1. Tracer la représentation graphique de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-4; 4]$  en utilisant la figure 1 du document réponse.
2. Démontrer que  $a_0 = \frac{1}{2}$ .
3. (a) Préciser la valeur de la pulsation  $\omega$ .  
(b) En utilisant une intégration par parties, calculer  $b_1$ .

On admet dans la suite de l'exercice que, pour tout nombre entier  $n$  supérieur ou égal à 1 :

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

4. Soit  $g$  la fonction définie pour tout nombre réel  $t$  par  $g(t) = f(t) - 0,5$ .
  - (a) Tracer la représentation graphique de la fonction  $g$  sur la figure 2 du document réponse.
  - (b) Quelle propriété de symétrie observe-t-on sur la représentation graphique de la fonction  $g$  ?
  - (c) En comparant les coefficients de Fourier des fonctions  $f$  et  $g$ , montrer que  $a_n = 0$  pour tout nombre entier  $n$  supérieur ou égal à 1.
5. On rappelle que la valeur efficace de la fonction  $f$  sur une période est le nombre réel positif, noté  $f_{eff}$ , défini par :

$$f_{eff}^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (f(t))^2 dt.$$

Démontrer que  $f_{eff}^2 = \frac{1}{3}$ .

BTS Groupement A1		Session 2011
Mathématiques	code: MATGRA1	Page : 5/8

6. On rappelle la formule de Parseval :

$$f_{eff}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

On décide de calculer une valeur approchée, notée  $P$ , de  $f_{eff}^2$  en se limitant aux cinq premiers termes de la somme, c'est-à-dire :

$$P = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^5 (a_n^2 + b_n^2).$$

(a) Calculer une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de  $P$ , puis de  $\frac{P}{f_{eff}^2}$ .

(b) En déduire, en pourcentage, l'erreur commise quand on remplace  $f_{eff}^2$  par  $P$ .

### Partie B

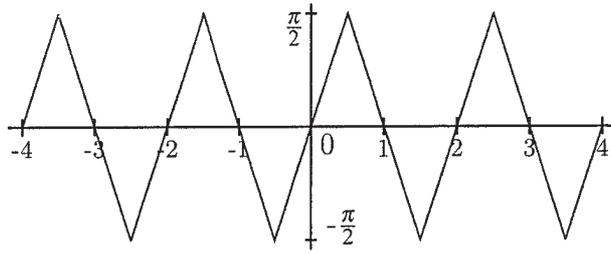
Soit  $h$  la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels, périodique, de période 2, dont le développement en série de Fourier est :

$$S_h(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos((2p+1)\pi t).$$

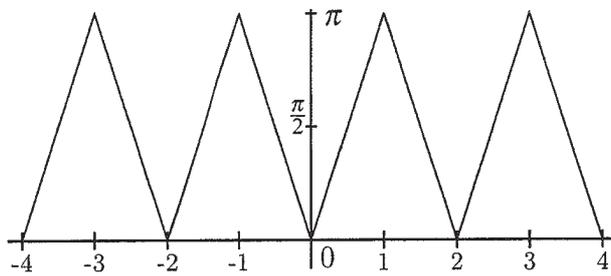
1. Déterminer la parité de la fonction  $h$ .
2. Sur l'annexe sont proposées quatre représentations graphiques.  
Laquelle des quatre courbes proposées est la représentation graphique de la fonction  $h$  sur l'intervalle  $[-4; 4]$ ? Justifier le choix effectué.
3. Déterminer  $h(t)$  pour tout nombre réel  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0; 1]$ .

BTS Groupement A1		Session 2011
Mathématiques	code: MATGRA1	Page : 6/8

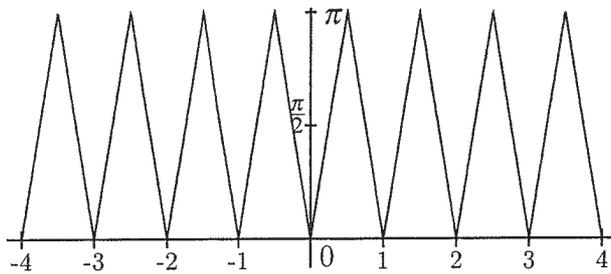
## Annexe



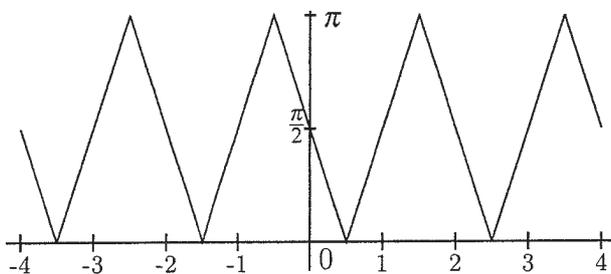
**Courbe 1**



**Courbe 2**

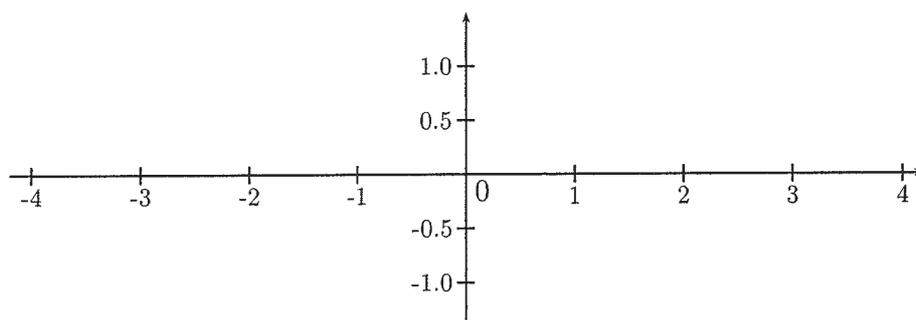


**Courbe 3**

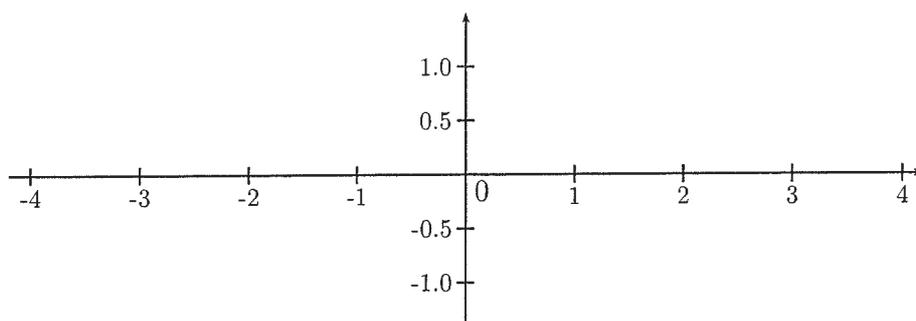


**Courbe 4**

**Document réponse à joindre à la copie**



**Figure 1 : représentation graphique de la fonction  $f$  (à compléter)**



**Figure 2 : représentation graphique de la fonction  $g$  (à compléter)**