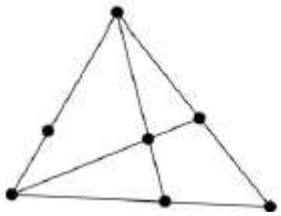
CLASSES DE PREMIERES GÉNÉRALES
ET TECHNOLOGIQUES

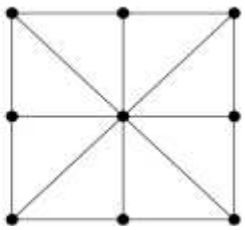
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
Académie d'AIX-MARSEILLE
Session 2014

Série S
CORRIGÉ

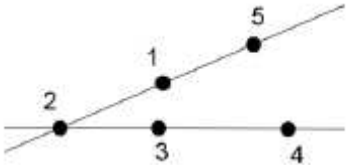
Exercice 1 : Figures équilibrées

1. Voici un graphe équilibré ayant 7 points et 5 segments, puis un graphe équilibré ayant 9 points et 8 segments.

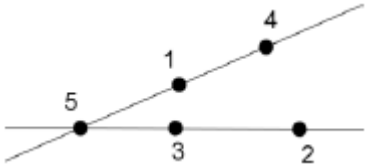




2. Exemple de numérotation non magique :



Exemple de numérotation magique de constante 10 :



On peut montrer que, pour être magique, une numérotation doit avoir au point d'intersection le numéro 1, 3 ou 5 (en raisonnant sur les numéros restants, par couples sur la même droite).

3. **a)** Les quatre segments portent respectivement les sommes a + c + e, a + b + f, b + d + e, c + d + f. La somme de ces quatre sommes est d'une part égale à 4K, et d'autre part : $2(a+b+c+d+e+f)=2(1+2+3+4+5+6)=42$. D'où l'égalité $4K=42$.

b) L'égalité est impossible puisque K est un entier. Donc un tel graphe n'est pas magique.

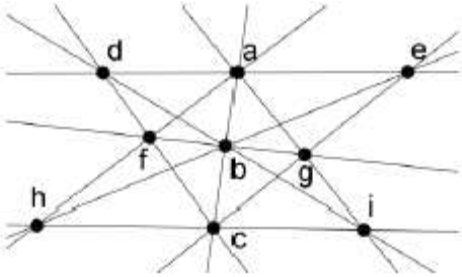
4. **a)** La somme a + c + e est minimale lorsque {a, c, e} = {1, 2, 3}, et cette somme est maximale lorsque {a, c, e} = {4, 5, 6}. D'où $6 \le a+c+e \le 15$.

b) Si le graphe est magique, de constante K, on obtient :
a + b + c = K ; c + d + e = K ; a + f + e = K, d'où, en sommant membre à membre,
(a + b + c + d + e + f) + (a + c + e) = 3K.
Comme a + b + c + d + e + f = 21, on en déduit que (a + c + e) = 3K – 21 = 3(K – 7).

c) On déduit de **a)** et **b)** que $6 \le 3(K-7) \le 15$, d'où $2 \le K-7 \le 5$ et $9 \le K \le 12$.

On vérifie que les quatre valeurs possibles de K donnent effectivement un graphe équilibré magique :
- avec K = 9, on place en tournant depuis un sommet les nombres 1, 5, 3, 4, 2, 6 ;
- avec K = 10, on place en tournant depuis un sommet les nombres 5, 4, 1, 6, 3, 2 ;
- avec K = 11, on place en tournant depuis un sommet les nombres 6, 2, 4, 3, 5, 1 ;
- avec K = 12 , on place en tournant depuis un sommet les nombres 6, 3, 2, 5, 4, 1.

5. On numérote la figure ainsi :



Ces trois sommets a, b, c sont les seuls qui appartiennent à quatre segments, les autres appartenant à trois segments.

On a donc (en additionnant les 10 sommes égales à K) :

$4(a+b+c)+3(d+e+f+g+h+i)=10K$.

On a donc $10K=3\times(a+b+c+d+e+f+g+h+i)+(a+b+c)$;

$10K=3\times 45+a+b+c$

Comme $1+2+3\leq a+b+c\leq 7+8+9$, c.-à-d. $6\leq a+b+c\leq 24$, on trouve que la seule possibilité pour K est K = 15 (et a + b + c = 15).

Selon les cas, le sommet qui porte la valeur 9 appartient à trois ou quatre segments.

Puisque la constante est 15, les deux autres nombres portés sur ces trois ou quatre segments ont pour somme 6. C'est impossible car il n'y a ni trois ni quatre façons d'obtenir une somme égale à 6, mais deux façons seulement : 6 = 1 + 5 = 2 + 4.

Conclusion : le graphe donné n'est pas magique.

Exercice 2 : Le plus court possible

Partie A

1. La longueur du réseau routier de l'assistant n°1 mesure 300 km.

Celle de l'assistant n°2 mesure $200\sqrt{2}\approx 282,8$ km (la diagonale d'un carré de côté *a* mesure $a\sqrt{2}$ qui se trouve avec le théorème de Pythagore).

Celle de l'assistant n°3 mesure $100\sqrt{5}-100+50\pi\approx 280,7$ km.

ABE est rectangle en B donc $AE^2=AB^2+BE^2=12\ 500$ donc $AE=\sqrt{12\ 500}=50\sqrt{5}$.

Puisque FE est le rayon du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[BC]$ d'où $AF=AE-FE=50\sqrt{5}-50$.

D'autre part, le demi-cercle mesure $\frac{2\pi\times 50}{2}=50\pi$. Ce qui donne une longueur totale de $100\sqrt{5}-100+50\pi$.

2. Oui, car il fait $20+4\times\sqrt{50^2+40^2}=20+40\sqrt{41}\approx 276,1$ cm.

Partie B

1. Comme admis au début de l'énoncé : si on trace une courbe quelconque entre deux points sa longueur est toujours au moins égale à celle du segment entre ces deux points.
Donc ici, le premier réseau dessiné par l'énoncé est de longueur supérieure ou égale à celui dessiné avec des segments, en remplaçant en outre les deux courbes entre E_0 et F_0 par un seul segment.

2. **a)** Notons A' le symétrique de A par rapport à Δ_E. La symétrie conserve les longueurs, on a : $DE_0 + E_0A = DE_0 + E_0A'$. D'après l'inégalité triangulaire, cette somme est toujours supérieure ou égale à DA'. Et il y a égalité si, et seulement si, E_0 appartient au segment $[DA']$. Ainsi, $DE_0 + E_0A$ sera minimale lorsque E_0 sera sur le segment $[DA']$ c'est-à-dire lorsque E_0 est sur la médiatrice de $[DA]$, qu'on appellera médiatrice horizontale du carré.

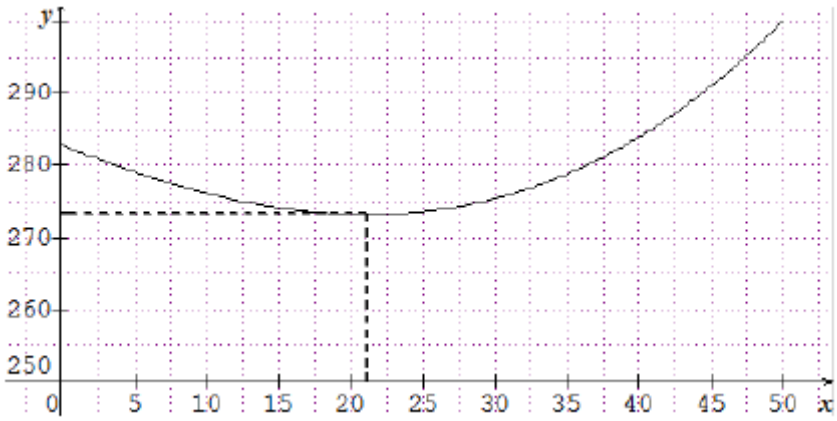
b) La distance minimale entre un point de Δ_E et un point de Δ_F est obtenue lorsque (EF) est perpendiculaire à Δ_E (et donc aussi à Δ_F). En effet, dans le cas contraire, notons G l'intersection de Δ_E et de la perpendiculaire à Δ_E passant par F. Le triangle EFG est alors rectangle en G donc son hypoténuse EF est supérieure à GF (théorème de Pythagore) ce qui ne donnerait pas une longueur minimale.

c) Les droites Δ_E et Δ_F étant fixées, pour tout réseau où E_0 est sur Δ_E et F_0 sur Δ_F, la longueur totale est $L + L' + L''$ où $L = DE_0 + E_0A$; L' est la distance entre les deux droites et $L'' = L = CF_0 + F_0B$.
Or d'après a) et b) il existe un réseau qui réalise le minimum de chacune de ces composantes, celui passant par E et F.
Conclusion (en considérant toutes les droites Δ_E et Δ_F possibles) : un réseau minimisant est bien de la forme de la figure.

3. **a)** On note O le point d'intersection de [EF] avec la médiatrice verticale (la médiatrice de [AB]).
Si E et F ne sont pas symétriques, on considère les longueurs DE+EA+EO d'un côté et CF+FB+FO de l'autre. Si par exemple CF+FB+FO est plus grand ou égal à DE+EA+EO on remplace F par E' symétrique de E par rapport à O. On obtient alors une configuration symétrique de longueur inférieure ou égale.

b) Si on note $2x = \text{EF}$ où $x \in [0\ ;\ 50]$ alors le réseau mesure $f(x) = 2x + 4\sqrt{(50-x)^2 + 50^2}$.

On représente cette fonction à l'aide de la calculatrice graphique et on essaie de chercher une valeur approchée du minimum :



On obtient un minimum d'environ 275 km atteint en $x \approx 21{,}13$ d'où $\text{EF} \approx 42{,}26$ km.

c) On peut d'abord chercher EAD :

$$\tan(\text{EAD}) = \frac{\frac{1}{2}(100 - \text{EF}_{\min})}{50} \approx 0{,}577 \text{ d'où } \widehat{\text{EAD}} \approx 30° \text{ et } \widehat{\text{AED}} \approx 120°.$$

Remarque : la valeur exacte de $\tan(\text{EAD}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$: on a donc $\widehat{\text{EAD}} = 30°$ et $\widehat{\text{AED}} = 120°$.

<u>Solution physique qui répond aux deux questions :</u> le réseau passe par A, D, O (le centre). On peut imaginer que les points sont placés sur une plaque percée en A, D, O et que l'on attache 3 fils en E. On fait passer les fils par les 3 trous et aux extrémités desquels on suspend des masses identiques. Le système prend une position d'équilibre. L'énergie potentielle doit être minimale, c'est-à-dire que la longueur des fils sous la plaque doit être la plus grande. Donc la longueur des fils au-dessus de la plaque est minimale. C'est donc la solution de notre problème. On fait le bilan des forces au point M. La somme des tensions (qui sont identiques en intensité) est nulle. Donc on a la somme de 3 vecteurs de même longueur qui est nulle. Cela n'est possible que si les angles valent 120°. En effet si l'un des trois angles est inférieur à 120°, la longueur du troisième vecteur qui est l'opposé de la somme (à l'intensité près) serait inférieure à 2 cos(60°) = 1.

Exercice 3 : Hôtel de luxe

Partie A

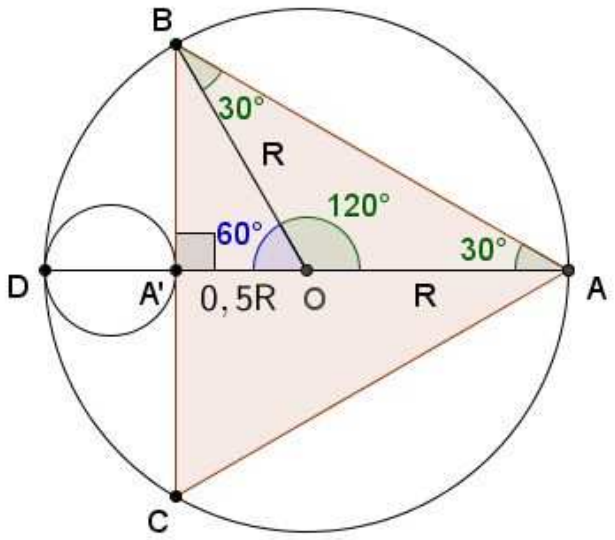
1. Le nombre de carreaux recouvrant la partie grisée est égal à :
$(n+h)^2 - n^2 = n^2 + 2nh + h^2 - n^2 = 2nh + h^2 = h(2n+h)$.
On a donc $h(2n+h) = 328$.

2. À l'ordre près des facteurs, $328 = 1\times 328 = 2\times 164 = 4\times 82 = 8\times 41$.

3. $2n+h$ étant supérieur à *h*, *n* et *h* peuvent donc être, *a priori*, solutions des seuls systèmes :
$\begin{cases} 2n+h=328 \\ h=1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2n+h=164 \\ h=2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2n+h=82 \\ h=4 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2n+h=41 \\ h=8 \end{cases}$
Dont les solutions sont :
$\begin{cases} n=163,5 \\ h=1 \end{cases}$; $\begin{cases} n=81 \\ h=2 \end{cases}$; $\begin{cases} n=39 \\ h=4 \end{cases}$ et $\begin{cases} n=16,5 \\ h=8 \end{cases}$
n et *h* étant entiers, les valeurs possibles de $(n\ ;\ h)$ sont $(81\ ;\ 2)$ et $(39\ ;\ 4)$.

Partie B

Soit R le rayon du jardin. On a $\pi R^2 = 16\pi$, d'où $R = 4$.



Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle.
Montrons que le parterre de roses a un diamètre de longueur 2 m.
1e méthode :
(AO) est la médiatrice issue de A du triangle équilatéral ABC. (AO) est donc également la bissectrice issue de A de ce même triangle. On en déduit $\widehat{BAO} = 30°$.
Dans le triangle AOB isocèle en O, $\widehat{OBA} = 30°$ et $\widehat{AOB} = 180° - 30° - 30° = 120°$.
Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOA'}$ étant supplémentaires, $\widehat{BOA'} = 180° - 120° = 60°$.
Dans le triangle OBA' rectangle en A', $OA' = OB\cos(60°) = 0,5R$.
$A' \in [DO]$ donc $DA' = DO - OA' = R - 0,5R = 0,5R = 2$ m.

2e méthode :

O est également le centre de gravité du triangle ABC. On a donc $AO = \frac{2}{3}AA'$. D'où $AA' = \frac{3}{2}R$.

$A' \in [DA]$ donc $DA' = DA - A'A = 2R - 1,5R = 0,5R = 2$ m.

Finalement, la surface au sol du parterre de roses est $\pi \times \left(\frac{2}{2}\right)^2 = \pi \text{ m}^2$.

Exercice 4 : Les tas d'allumettes

Partie A : deux tas

1. a) Si mon adversaire prend une allumette dans un tas, il suffit que je prenne une allumette dans l'autre tas. Il reste deux tas à une allumette. Mon adversaire en prend alors une et il ne me reste plus qu'à prendre la dernière.

b) Il n'y a que deux possibilités de jeu :

- soit mon adversaire choisit de prendre une seule allumette et d'après la question précédente, je gagne.
- soit il choisit de prendre les deux allumettes d'un des deux tas et il ne me reste plus qu'à prendre les deux allumettes du second.

2. Si mon adversaire prend deux allumettes dans le tas à 5 allumettes, on se retrouve dans la configuration (3,3).

Il y a alors trois possibilités :

- Je prends une allumette : configuration (3,2). Il lui suffit de se ramener à la configuration (2,2) et je perds d'après la question précédente.
- Je prends deux allumettes : configuration (3,1). Il se ramène donc à la configuration (1,1) qui est perdante pour moi.
- Je prends 3 allumettes : configuration (3,0). Il prend les 3 dernières allumettes et gagne.

Dans tous les cas, je perds.

3. Supposons que les deux tas comprennent le même nombre d'allumettes. Mon adversaire prend un certain nombre d'allumettes dans un des deux tas. Je choisis alors d'égaliser les deux. Ce processus va se répéter jusqu'à ce que l'on se ramène à une configuration du type (3,3) (2,2) (1,1) dont je sais par les questions précédentes qu'elles sont gagnantes pour moi.

Supposons que les deux tas comprennent un nombre différent d'allumettes. Il suffit à mon adversaire d'égaliser pour retomber dans la situation précédente, et donc l'emporter.

Partie B : trois tas

1. Étudions les différentes configurations possibles après que mon adversaire ait joué :
   (0,2,3) ; (1,1,3) ; (1,0,3) ; (1,2,2) ; (1,2,1) ; (1,2,0).
   Dans tous les cas je peux me ramener à une situation avec deux tas identiques et mon adversaire doit jouer. Je l'emporte donc d'après ce que l'on a vu en **partie A**.

2. Je choisis de commencer en prenant 5 allumettes sur le tas de 6 : On arrive donc à la configuration (4;5;1). Mon adversaire ne doit surtout pas égaliser deux des trois tas car sinon il me suffit de prendre toutes les allumettes du troisième et me ramener à une situation gagnante. De même il ne faut surtout pas qu'il vide un des trois tas car sinon je vais pouvoir en égaliser deux et l'emporter.
   Que reste-il comme options à mon adversaire ?
   Il peut donc se ramener à deux ou trois allumettes sur les tas 4 ou 5.
   Traitons le cas où il décide de prendre 2 allumettes sur le tas 4 : on obtient (2;5;1) et il me suffit de me ramener à la configuration (1,2,3) pour être sûr de l'emporter d'après la question précédente. Les trois autres cas sont analogues.