SUJET SORTI

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SÉRIE SCIENCES ET TECHNOLOGIES TERTIAIRES

SPÉCIALITÉS : COMPTABILITÉ et GESTION – INFORMATIQUE et GESTION

SESSION 2004

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée 3 heures – Coefficient 4

Fournir du papier millimétré au candidat

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.
La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices et du formulaire officiel est autorisé.

EXERCICE 1 (5 points)

Une commune désire aménager un nouvel espace vert. Une société de vente lui propose des lots A comprenant dix rosiers, un magnolia et un camélia pour un montant de 200 € ou des lots B comprenant cinq rosiers, un magnolia et trois camélias pour un montant de 300 €. Les besoins sont d'au moins 100 rosiers, 16 magnolias et 30 camélias. On désigne par x le nombre de lots A, et par y le nombre de lots B achetés.

L'annexe 1 présente une solution graphique de ce problème.
Ce graphique sera complété et remis avec la copie.

1. a) Quelle est la contrainte concernant les rosiers ?
   Quelle est la droite frontière associée à cette contrainte ?

   b) Quelle est la contrainte concernant les magnolias ?
   Quelle est la droite frontière associée à cette contrainte ?

   c) Quelle est la contrainte concernant les camélias ?
   Quelle est la droite frontière associée à cette contrainte ?

2. Si d désigne la dépense totale en euros pour l'achat des x lots A et y lots B, montrer que $y = -\frac{2}{3}x + \frac{d}{300}$

   Tracer la droite Δ d'équation $y = -\frac{2}{3}x + \frac{d}{300}$ lorsque $d = 5\,400$.

3. Expliquer comment obtenir à l'aide du graphique le couple $(x; y)$ qui permet de satisfaire les besoins au coût le plus faible possible.
   Quel est ce couple ? Calculer alors la dépense minimale possible.

EXERCICE 2 (5 points)

Une urne contient 4 boules : deux rouges, une verte et une jaune, indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de cette urne. Après avoir noté la couleur de la boule obtenue on la replace dans l'urne et on procède à un second tirage. On note alors à nouveau la couleur obtenue.

1. Dessiner l'arbre correspondant à cette expérience.

2. Soit E l'événement "les deux boules tirées sont rouges"
   et F l'événement "une seule des deux boules tirées est rouge".

   A l'aide de l'arbre, calculer les probabilités p (E) et p (F).

3. Définir par une phrase l'événement $G = E \cup F$. Calculer p (G).

4. À l'aide de p (G), calculer p (H) où H est l'événement "aucune des deux boules tirées n'est rouge".

5. Les boules de l'urne portent chacune un numéro : les rouges le numéro 1, la verte le numéro 2, la jaune le numéro 4. On s'intéresse maintenant aux numéros obtenus lors des tirages.

   On appelle S la somme des numéros obtenus après le tirage des deux boules. Quelle est la probabilité que S soit supérieure ou égale à 4 ? (on pourra faire apparaître les différentes sommes à l'extrémité des branches de l'arbre de la question 1).

PROBLÈME (10 points)

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = a + (x + b)\,e^{-x}$ où a et b sont deux réels donnés.
On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ avec pour unités 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

PARTIE A.

1. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la dérivée de la fonction f.

2. a) En annexe 2 est fourni le tracé de la tangente T à C au point d'abscisse 0.
   Ce graphique sera remis complété avec la copie.
   Justifier que $f(0) = 2$ et $f'(0) = 2$.

   b) À l'aide de ces deux égalités, déterminer les réels a et b.

PARTIE B.

On prend pour tout réel x, $f(x) = 3 + (x - 1)\,e^{-x}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 3 + \dfrac{x}{e^x} - e^{-x}$.

   Sachant que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, déterminer la limite de f en $+\infty$.

   En déduire une asymptote à la courbe C.

3. a) Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (2 - x)\,e^{-x}$, où f' désigne la dérivée de la fonction f.
   Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
   Dresser le tableau de variation de f.
   b) Tracer la courbe C sur le graphique en annexe 2.

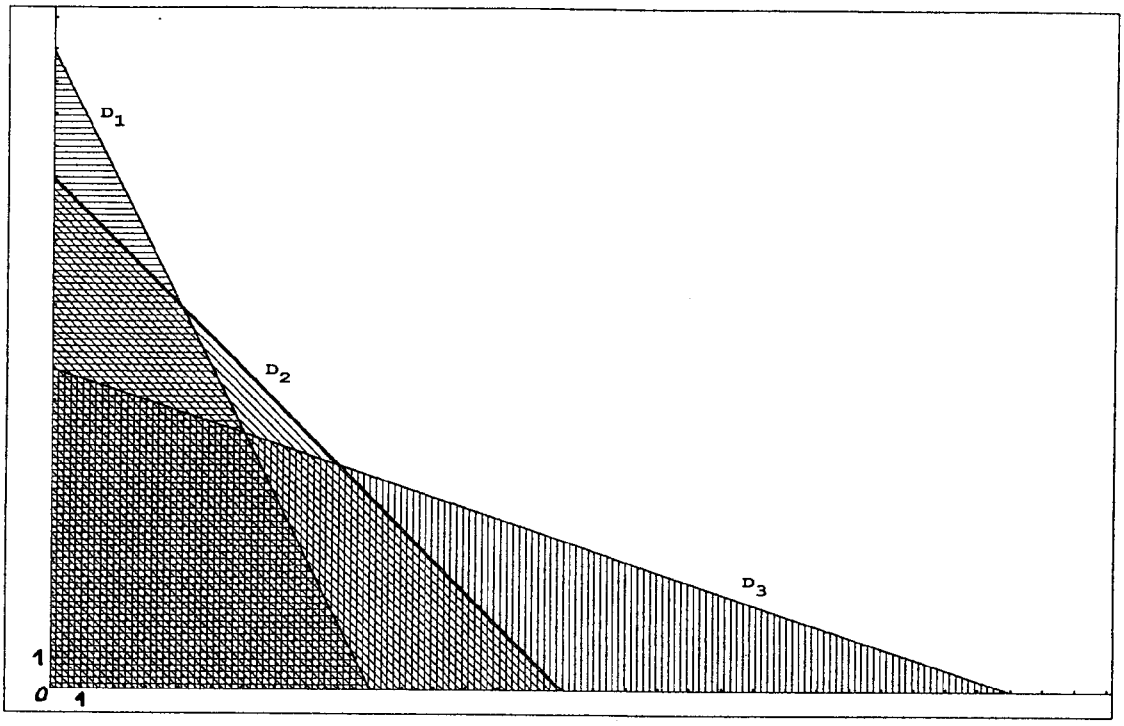
PARTIE C

1. Montrer que la fonction F définie sur R par $F(x) = x(3 - e^{-x})$ est une primitive de f sur R.

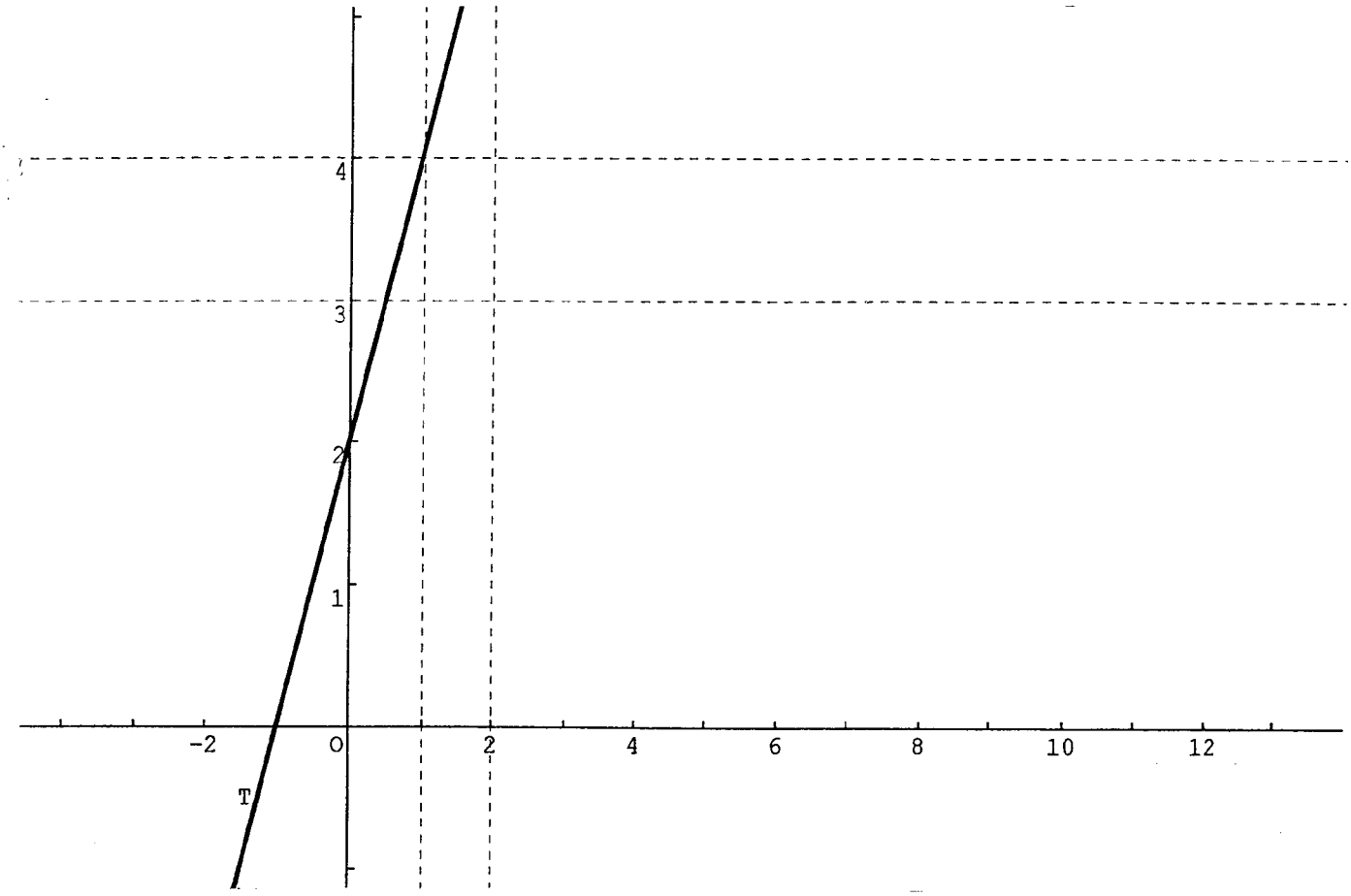
2. Déterminer l'aire, en cm^2, de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

Ces graphiques sont à remettre complétés avec la copie

ANNEXE 1 pour l'exercice 1



ANNEXE 2 pour le problème



BACCALAURÉAT, SÉRIES STT spécialités comptabilité et gestion, informatique et gestion

STL spécialité biochimie - génie biologique
STI Arts Appliqués

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. STATISTIQUE *(SÉRIES STL, STT)*

Moyenne, variance, écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i \; ; V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

II. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

III. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

C. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
- si $\Delta = 0$, une solution réelle double
$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$
- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geq 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

IV. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS*

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, n entier naturel

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$, n entier naturel non nul

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$

(SÉRIES F12, STL)

$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u'+v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$

$\left(e^u\right)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL* *(SÉRIES F12, STT)*

Formule fondamentale

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b \left(\alpha f(t)+\beta g(t)\right)dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a\leqslant b$ et $f\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a\leqslant b$ et $f\leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Valeur moyenne de f sur $[a\ ;\ b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES (SÉRIE STL)*

Équations	Solutions sur $]-\infty,+\infty[$
$y'-ay=0$	$f(x)=ke^{ax}$