BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2007

EPREUVE DE SPECIALITE DE MATHEMATIQUES

Série L

Durée de l'épreuve : 3 heures

Ce sujet comporte 6 pages, y compris celle-ci, numérotées de 1 à 6

La page annexe 2 numérotée 6/6 est à rendre avec la copie

L'usage d'une calculatrice est autorisé

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (6 points)

Le but de cet exercice est de montrer, par deux méthodes différentes, que pour tout nombre entier naturel n, le nombre $n^3 + 5n$ est divisible par 6.

Première méthode :

1) Montrer que tout nombre entier naturel n est congru, modulo 6, à 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.

2) Recopier et compléter le tableau suivant avec des nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 5.

$n \equiv \ldots \pmod 6$	0	1	2	3	4	5
$n^3 \equiv \ldots \pmod 6$						
$5n \equiv \ldots \pmod 6$						
$n^3 + 5n \equiv \ldots \pmod 6$						

3) En déduire que pour tout nombre entier naturel n, le nombre $n^3 + 5n$ est divisible par 6.

Deuxième méthode :

1) Montrer que pour tout nombre entier naturel n, $n(n + 1)$ est pair. En déduire que pour tout nombre entier naturel n, $3n(n+1)$ est divisible par 6.

2) On admet que $(n+1)^3 + 5(n+1) = (n^3 + 5n) + 3n(n+1) + 6$.

Montrer que si pour un nombre entier naturel n, $n^3 + 5n$ est divisible par 6, alors $(n + 1)^3 + 5(n + 1)$ est divisible par 6.

3) Que reste-t-il à vérifier, pour en déduire que $n^3 + 5n$ est divisible par 6, pour tout nombre entier naturel n ?

Exercice 2 : (4 points)

Pour chacune des quatre affirmations, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant le choix effectué.

Chaque question est notée sur un point, avec la règle suivante :

- Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
- Une mauvaise réponse n'enlève pas de point.

1) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x+1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2) L'équation $\dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{4}{3}$ a une solution dans $\mathbb{R}$.

3) La suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$.

4) Pour tout nombre réel x on a $1{,}01^x < 1\,000\,000$.

Exercice 3 : (5 points)

Le tableau suivant donne la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 100 :

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	

Une urne A contient 50 boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 50.

Une deuxième urne B contient 50 boules indiscernables au toucher, numérotées de 51 à 100.

Un jeu consiste à lancer un dé cubique non pipé portant deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 2, puis à tirer au hasard une boule, avec la règle suivante :

- Si la face obtenue porte le numéro 1, on choisit la boule dans l'urne A.
- Si la face obtenue porte le numéro 2, on choisit la boule dans l'urne B.

Dans la suite, on note A l'événement « la boule choisie provient de l'urne A », on note B l'événement « la boule choisie provient de l'urne B » et on note R l'événement « le nombre écrit sur la boule choisie est un nombre premier ».

On donnera les valeurs exactes des probabilités demandées.

On joue à ce jeu.

1) Quelle est la probabilité que la boule choisie provienne de l'urne A ?
Quelle est la probabilité que la boule choisie provienne de l'urne B ?
2) Justifier que la probabilité que la boule porte un nombre premier, sachant qu'elle provient de l'urne A est 0,3.
Quelle est la probabilité que la boule porte un nombre premier, sachant qu'elle provient de l'urne B ?
3) Montrer que la probabilité d'obtenir une boule portant un nombre premier en jouant à ce jeu est $p(R)=\frac{7}{30}$. Pour répondre à cette question, on pourra s'aider d'un arbre de probabilités.
4) Léo joue une partie et obtient une boule portant un nombre premier. Quelle est la probabilité que cette boule provienne de l'urne A ?

Exercice 4 : (5 points)

La feuille annexe 1 présente le dessin en perspective parallèle d'un cube ABCDEFGH d'arête l, sur lequel est posé un deuxième cube IJKHPQRS d'arête $\frac{l}{2}$.

Le but de cet exercice est de représenter ces cubes en perspective centrale sur l'annexe 2, sachant que la face **ABFE** est dans un plan **frontal**.

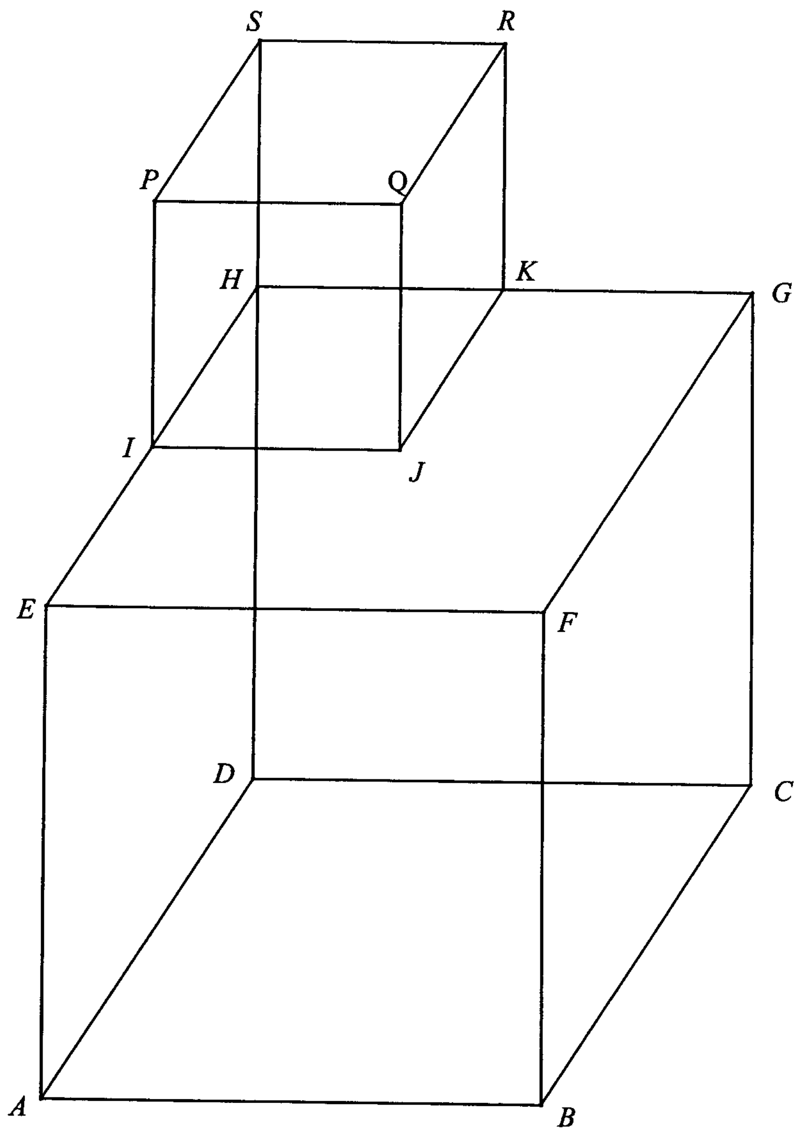
Dans tout l'exercice, on notera a, b, c …les images des points A, B, C … dans cette perspective centrale.

On veillera à laisser apparentes toutes les traces de construction.

Le barème tiendra compte du soin et de la précision apportés à la construction.

1) a) Construire *abfe*.
b) Enoncer une propriété de la perspective centrale qui a permis de construire *abfe*.
2) Construire le point de fuite principal w.
3) Terminer la construction de *abcdefgh*.
4) Indiquer, sans justifier, ce que représente le point J pour la face EFGH. En déduire la construction de j.
5) Terminer la construction de *ijkhpqrs*.

Annexe 1 de l'exercice 4



Annexe 2 de l'exercice 4

(à rendre avec la copie)