Spécialité

EXERCICE 2 (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

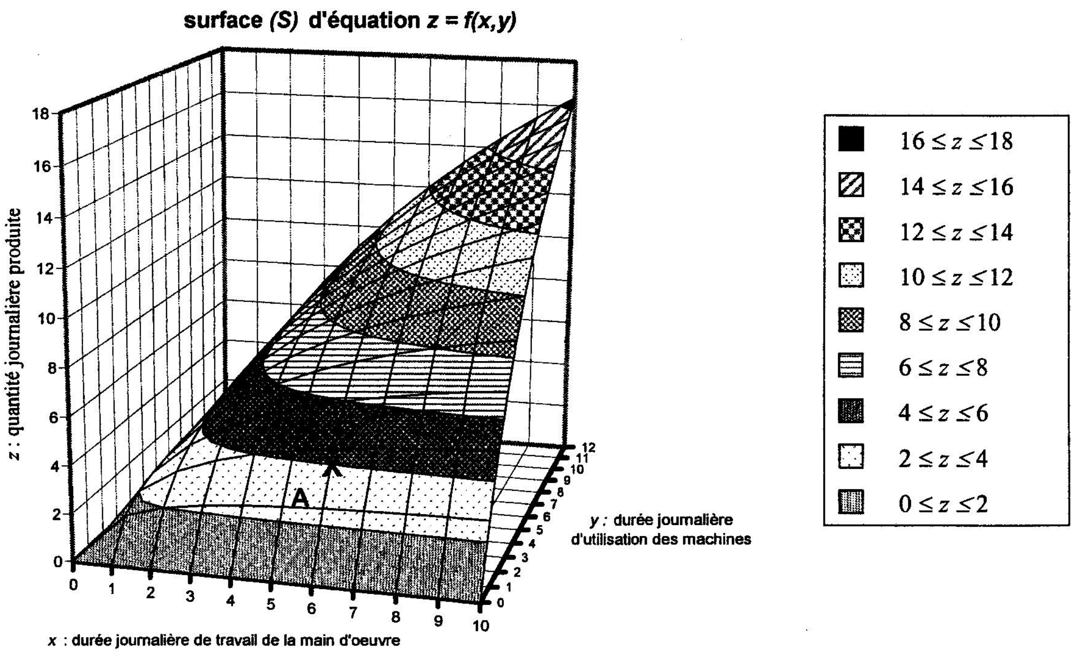
La production journalière d'une entreprise dépend de deux facteurs : le travail de la main d'œuvre et l'utilisation des machines. On désigne :

- par x la durée journalière de travail de la main d'oeuvre, exprimée en heures ; x appartient à l'intervalle $]0;10]$
- par y la durée journalière d'utilisation des machines, exprimée en heures ; y appartient à l'intervalle $]0;12]$

La quantité journalière produite (en tonnes) est donnée par la relation :

$$f(x\,,\,y)=\frac{3xy}{x+y} \text{ avec } 0<x\leq 10 \text{ et } 0<y\leq 12.$$

La figure ci-dessous représente la surface (S) d'équation : $z=f(x\,,\,y)$ pour $0<x\leq 10$ et $0<y\leq 12$.



PARTIE 1 : Le point A représenté par une croix est un point de la surface (S).

1) Déterminer graphiquement l'abscisse et la cote du point A. Calculer son ordonnée (arrondie au dixième).

2) Interpréter les résultats obtenus en référence à la production journalière de l'entreprise.

PARTIE 2 : Pour chaque heure, le coût total du travail s'élève à 4 milliers d'euros, et le coût total d'utilisation des machines s'élève à 1 millier d'euros.

L'entreprise décide de dépenser 36 milliers d'euros par jour et cherche à maximiser sa production journalière sous cette contrainte. On a alors $4x+y=36$.

La quantité journalière produite (en tonnes) sous cette contrainte de coût peut donc être modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,10]$ par $g(x)=\dfrac{4x^2-36x}{x-12}$.

1) On note g' la fonction dérivée de g sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.

a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,10]$, calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)=\dfrac{4(x-6)(x-18)}{(x-12)^2}$.

b. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.

2) **a.** En déduire la durée journalière de travail et la durée journalière d'utilisation des machines permettant d'obtenir une production journalière maximale pour un coût total de 36 milliers d'euros.

b. Préciser la quantité journalière maximale produite en tonnes.