

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2007

MATHÉMATIQUES

Série Sciences et Technologies Industrielles

GÉNIE MÉCANIQUE

Option B : systèmes motorisés

Option C : structures métalliques

Option D : bois et matériaux associés

Option E : matériaux souples

GÉNIE DES MATÉRIAUX

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 4

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de 2 exercices indépendants et d'un problème.

Le candidat doit traiter les 2 exercices et le problème.

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements
entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le formulaire officiel et deux feuilles de papier millimétré sont distribués avec le sujet.

EXERCICE 1 (4 points)

Une entreprise fabrique des plaquettes de métal. Pour cela elle utilise deux machines, une qui les ajuste en longueur et une autre qui les ajuste en largeur.

Les machines sont programmées pour donner des plaquettes de 2,5 cm sur 1,5 cm.

Des erreurs de manipulation peuvent conduire à des dimensions non conformes : une longueur de 2,6 cm au lieu de 2,5 cm ; une largeur de 1,6 cm au lieu de 1,5 cm.

Afin de vérifier la conformité de ces plaquettes, on procède à deux tests : un test sur la longueur et un test sur la largeur. On effectue les deux tests sur 100 plaquettes et on obtient :

- 20 plaquettes ont une longueur de 2,6 cm ;
- 18 plaquettes ont une largeur de 1,6 cm ;
- 5 plaquettes ont une dimension de 2,6 cm sur 1,6 cm.

On prélève au hasard une plaquette parmi les 100. Elles ont donc toutes la même probabilité d'être choisies.

1. Recopier et compléter le tableau des effectifs suivant :

	Largeur conforme 1,5	Largeur non conforme 1,6	Total
Longueur conforme 2,5			
Longueur non conforme 2,6		5	20
Total			100

2. (a) Quelle est la probabilité qu'une plaquette prélevée au hasard soit conforme à ce que veut l'entreprise ?
(b) Quelle est la probabilité qu'une plaquette prélevée au hasard ait exactement une de ses dimensions non conforme ?
3. Soit X la variable aléatoire qui à chaque plaquette prélevée au hasard associe le nombre de ses dimensions non conformes.
(a) Donner les valeurs possibles de X .
(b) Donner la loi de probabilité de X .

EXERCICE 2 (5 points)

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbf{C} des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

On donnera les solutions sous forme algébrique puis, pour chacune d'elles, le module et un argument.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.
On note A, B et C les points du plan ayant pour affixes respectives

$$z_A = 1 - i\sqrt{3} \quad , \quad z_B = 2 \quad \text{et} \quad z_C = 1 + i\sqrt{3}.$$

- (a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
- (b) Montrer que les triangles OAB et OBC sont équilatéraux.
- (c) Soient D, E et F les points tels que le polygone ABCDEF soit un hexagone régulier.
Construire les points D, E et F sur la figure commencée dans la question **2.(a)**.
On rappelle qu'un hexagone est un polygone à 6 côtés.
- (d) Calculer le produit des affixes des 6 sommets de cet hexagone régulier.

PROBLÈME (11 points)

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels \mathbf{R} par :

$$f(x) = e^{-x} + 2x - 3.$$

Soit (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. Limites aux bornes

(a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

(b) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

On pourra établir au préalable que, pour tout nombre réel x , $f(x) = e^{-x}(1 + 2xe^x - 3e^x)$.

2. Asymptote oblique

(a) Montrer que la droite (\mathcal{D}) d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à la courbe (\mathcal{C}) .

(b) Étudier la position relative de la droite (\mathcal{D}) par rapport à la courbe (\mathcal{C}) .

3. Étude des variations de la fonction f

(a) Montrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x}$ où f' est la dérivée de la fonction f .

(b) Résoudre dans \mathbf{R} l'équation d'inconnue x : $f'(x) = 0$.

(c) Étudier le signe de la dérivée f' de la fonction f sur \mathbf{R} .

(d) Établir le tableau de variation de la fonction f .

(e) Calculer $f(1)$ et déterminer le signe de $f(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$.

4. Tracer la droite (\mathcal{D}) et la courbe (\mathcal{C}) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

5. Calculer l'aire \mathcal{A} en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe (\mathcal{C}) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. On donnera la valeur exacte de \mathcal{A} , puis la valeur arrondie à 10^{-2} .

6. Contrôler l'ordre de grandeur du résultat de la question précédente en calculant l'aire en cm^2 de la surface d'un ou deux trapèzes que l'on précisera.

**BACCALAURÉAT, SÉRIES STI (toutes spécialités), F10B,
STL (spécialités physique de laboratoire et de procédés industriels
chimie de laboratoire et de procédés industriels)**

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad ; \quad P(\Omega) = 1 \quad ; \quad P(\emptyset) = 0$$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leq x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (E(X))^2$

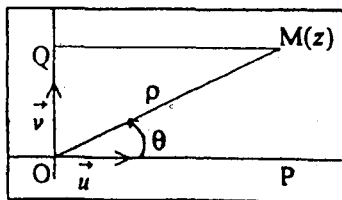
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. NOMBRES COMPLEXES

Forme algébrique : $z = x + iy$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}, \rho > 0$



$$\begin{aligned} \vec{OM} &= x \vec{u} + y \vec{v} \\ \overline{OP} &= x = \Re(z) = \rho \cos \theta \\ \overline{OQ} &= y = \Im(z) = \rho \sin \theta \\ OM &= \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Opérations algébriques

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$$

$$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Conjugué

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta} \quad ; \quad \bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$$

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad ; \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \quad ; \quad \overline{zz'} = \bar{z} \bar{z}'$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$$zz' = (\rho e^{i\theta})(\rho' e^{i\theta'}) = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$$

$$|zz'| = |z||z'|$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}, n \in \mathbf{Z}$$

Inégalité triangulaire

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

B. IDENTITÉS REMARQUABLES

(variables sur \mathbf{C} et donc sur \mathbf{R})

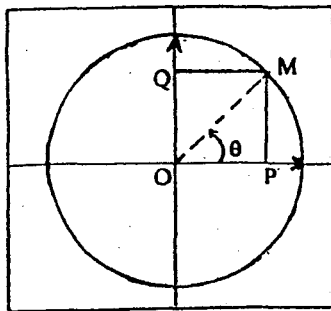
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad ; \quad a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$$

C. TRIGONOMETRIE



$$\overline{OP} = \cos \theta$$

$$\overline{OQ} = \sin \theta$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad ; \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

Formules d'addition

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a) \quad ; \quad \sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$$

Formules de Moivre

$$\text{Pour tout entier naturel non nul } n, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$\text{soit encore } (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $ax^2 + bx + c = a(x - z_1)(x - z_2)$.

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad ; \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

$$\text{Si } b \neq 1, \quad S_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$$

$$\text{Si } b = 1, \quad S_n = n + 1$$

III. ANALYSE

A. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\text{Si } x \in]-\infty, +\infty[\text{ et } y \in]0, +\infty[.$$

$$y = \exp x = e^x \text{ équivaut à } x = \ln y$$

$$e^0 = 1$$

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$$

$$(e^a)^b = e^{ab}$$

$$\ln a^x = x \ln a$$

2. Fonctions puissances

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$$

$$x^0 = 1$$

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$$

$$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$$

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

$$\text{Si } n \in \mathbb{N}^*, x \in [0, +\infty[\text{ et } y \in [0, +\infty[.$$

$$y = \sqrt[n]{x} \text{ équivaut à } x = y^n$$

B. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty;$$

$$\text{si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0;$$

$$\text{si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = +\infty$$

Croissances comparées à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x , $\sin x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

2. Suites (SÉRIES STL, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)

$$\text{Si } k > 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = +\infty, \text{ si } 0 < k < 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$$

C. DÉRIVÉES ET PRIMITIVES (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de validité
k	0	$]-\infty, +\infty[$
x	1	$]-\infty, +\infty[$
$x^n, n \in \mathbf{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbf{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbf{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty, +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \text{ } u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

D. CALCUL INTÉGRAL

Si F est une primitive de f , alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

Positivité

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leq b$ et $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$

E. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Equations	Solutions sur $]-\infty, +\infty[$
$y' - \alpha y = 0$	$f(x) = ke^{\alpha x}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$