SUJET SORTI

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE (STL)

Option Physique de Laboratoire et de Procédés Industriels

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES - Écrit -

Durée : 4 heures - Coefficient : 4

La calculatrice (conforme à la circulaire N°99-186 du 16-11-99) est autorisée
Le formulaire officiel est autorisé
Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 : (6 points)

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

Partie A

Soit $P(z) = z^3 + 4\sqrt{3}\,z^2 + 24\,z + 24\sqrt{3}$ où z est une variable complexe.

a. Vérifier que $P(z) = (z + 2\sqrt{3})(z^2 + 2\sqrt{3}\,z + 12)$.

b. Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes l'équation $z^2 + 2\sqrt{3}\,z + 12 = 0$

c. En déduire les solutions dans **C** de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2\sqrt{3}$, $z_B = -\sqrt{3} + 3\,i$, $z_C = -\sqrt{3} - 3\,i$.

2. **a.** Déterminer le module et un argument de z_A, z_B et z_C.
   b. Donner l'écriture exponentielle de z_A, z_B et z_C.

3. R est la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.

   a. Donner l'écriture complexe de R.
   b. Montrer que l'image de A par R est B.
   c. Calculer, sous forme algébrique, l'affixe de D, image de B par R.

4. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [CD].

   a. Justifier que O est le centre de $\mathcal{C}$.
   b. Montrer que les points A et B appartiennent à $\mathcal{C}$.
   c. En déduire la nature des triangles CAD et CBD.

EXERCICE 2 : (4 points)

La tension u aux bornes d'un circuit électrique vérifie l'équation différentielle (E) :

$$u'' + 3600\,\pi^2\,u = 0$$

dans laquelle u'' désigne la dérivée seconde de la tension par rapport au temps t.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière f de (E) telle que :

$$f\left(\frac{1}{180}\right) = 0 \text{ et } f'(0) = -\frac{\pi}{2}$$

3. **a.** Vérifier que, pour tout réel t, on a :

$$f(t) = \frac{1}{60}\cos\left(60\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

   b. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur $[0 , \frac{1}{90}]$.

PROBLÈME : (10 points)

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $g(x)=x^2-8\ln x+8$

1. **a.** Calculer $g'(x)$.
   b. Étudier le signe de $g'(x)$.
   c. Dresser le tableau de variation de g (l'étude des limites de g n'est pas demandée).
2. Donner une valeur approchée de $g(2)$ à 10^{-2} près, en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\,,+\infty[$.

Partie B : Étude et représentation graphique d'une fonction.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique 1cm.

Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-3x+8\ln x}{x}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que pour tout réel x de $]0\,,+\infty[$ on a : $f(x)=x-3+\dfrac{8\ln x}{x}$.
2. **a.** Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de $f(x)$.
   b. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$, et en donner une équation.
3. **a.** Déterminer la dérivée f' de f sur $]0\,,+\infty[$.
   b. Vérifier que pour tout réel x de $]0\,,+\infty[$ on a : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ et en déduire le signe de $f'(x)$.
   c. Dresser le tableau de variations de f.
4. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y=x-3$.
   a. Montrer que $\mathscr{D}$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
   b. Calculer les coordonnées du point d'intersection A de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$.
   c. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$.
5. Tracer dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$.

Partie C : Calcul d'une aire.

1. Soit h la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.
   a. Vérifier qu'une primitive de h sur $]0\,,+\infty[$ est la fonction H définie par
   $H(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.
   b. En déduire une primitive de f sur $]0\,,+\infty[$.
2. **a.** Hachurer la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, et les droites d'équation $x=1$ et $x=5$.
   b. Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan hachurée, on donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près.