EXERCICE 1 (4 points)
Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1. Une solution de l'équation $2z + \overline{z} = 9 + i$ est :

a) 3 b) i c) $3 + i$

2. Soit z un nombre complexe ; $|z + i|$ est égal à :

a) $|z| + 1$ b) $|z - 1|$ c) $|i\overline{z} + 1|$

3. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est :

a) $-\dfrac{\pi}{3} + \theta$ b) $\dfrac{2\pi}{3} + \theta$ c) $\dfrac{2\pi}{3} - \theta$

4. Soit n un entier naturel. Le complexe $\left(\sqrt{3} + i\right)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :

a) $n = 3$ b) $n = 6k + 3$ avec k entier relatif c) $n = 6k$ avec k entier relatif

5. Soient A et B deux points d'affixes respectives i et -1. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - i| = |z + 1|$ est :

a) la droite (AB) b) le cercle de diamètre $[AB]$ c) la droite perpendiculaire à (AB) passant par O

6. Soit Ω le point d'affixe $1 - i$. L'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z - 1 + i| = |3 - 4i|$ a pour équation :

a) $y = -x + 1$ b) $(x - 1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$ c) $z = 1 - i + 5e^{i\theta}$ avec θ réel

7. Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et $3i$. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ est :

a) $1 - 4i$ b) $-3i$ c) $7 + 4i$

8. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{z - 2}{z - 1} = z$ est :

a) $\{1 - i\}$ b) L'ensemble vide c) $\{1 - i, 1 + i\}$

EXERCICE 2 (5 points)
Commun à tous les candidats

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25% au premier fournisseur et 75% au second.
La proportion de composants défectueux est de 3% chez le premier fournisseur et de 2% chez le second.
On note :
- D l'événement « le composant est défectueux ».
- F_1 l'événement « le composant provient du premier fournisseur ».
- F_2 l'événement « le composant provient du second fournisseur ».

1. (a) Dessiner un arbre pondéré.

   (b) Calculer $p(D \cap F_1)$, puis démontrer que $p(D) = 0,0225$.

   (c) Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} près.

2. Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?

3. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit la loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.
(a) Sachant que $p(X > 5) = 0,325$, déterminer λ.
Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0,225$.

(b) Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?

(c) Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

EXERCICE 3 (6 points)
Commun à tous les candidats

PARTIE A : Question de cours

1. Soit f une fonction réelle définie sur $[a;+\infty[$. Compléter la phrase suivante :
   On dit que f admet une limite finie l en $+\infty$ si ...
2. Démontrer le théorème « des gendarmes » : Soient f, g et h trois fonctions définies sur $[a;+\infty[$ et $\mathcal{L}$ un nombre réel. Si g et h ont pour limite commune $\mathcal{L}$ quand x tend vers $+\infty$, et si pour tout x assez grand $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, alors la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à $\mathcal{L}$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x - x - 1$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à (C). On a représenté sur la feuille annexe la courbe (C) et la droite (D).

1. Soit a un nombre réel. Ecrire, en fonction de a, une équation de la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse a.
2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) en un point N d'abscisse b. Vérifier que $b - a = -1$.
3. En déduire une construction, à effectuer sur la feuille annexe, de la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse 1,5. On fera apparaître le point N correspondant.

PARTIE C

1. Déterminer graphiquement le signe de f.
2. En déduire pour tout entier naturel non nul n les inégalités suivantes :

$$(1)\ e^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \frac{1}{n} \qquad (2)\ e^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1}$$

3. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$$

4. En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

$$e \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

5. Déduire des questions précédentes un encadrement de

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

   puis sa limite en $+\infty$.

EXERCICE 4 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit $OABC$ un tétraèdre trirectangle (les triangles OAB, OBC, OCA sont rectangles en O). On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).
Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de ce tétraèdre.

1. (a) Pourquoi la droite (OH) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?
   Pourquoi la droite (OA) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?

   (b) Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales. On démontre de façon analogue que les droites (BH) et (AC) sont orthogonales. Ce résultat est ici admis.

   (c) Que réprésente le point H pour le triangle ABC ?

2. L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé $\left(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ et $C(0, 0, 3)$.

   (a) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

   (b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite D passant par O et orthogonale au plan (ABC).

   (c) Démontrer que le plan (ABC) et la droite D se coupent en un point H de coordonnées $\left(\frac{36}{49}; \frac{18}{49}; \frac{12}{49}\right)$.

3. (a) Calculer la distance du point O au plan (ABC).

   (b) Calculer le volume du tétraèdre $OABC$. En déduire l'aire du triangle ABC.

   (c) Vérifier que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

EXERCICE 4 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. (a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.
   (b) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier.
   (c) En déduire que $6^{40} \equiv 1\,[11]$ et que $6^{40} \equiv 1\,[5]$.
   (d) Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.
2. Dans cette question, x et y désignent des entiers relatifs.
   (a) Montrer que l'équation
   $$(E) \quad 65x - 40y = 1$$
   n'a pas de solution.
   (b) Montrer que l'équation
   $$(E') \quad 17x - 40y = 1$$
   admet au moins une solution.
   (c) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').
   (d) Résoudre l'équation (E').
   En déduire qu'il existe un unique entier naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1\,[40]$.
3. Pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b\,[55]$ et si $a^{40} \equiv 1\,[55]$ alors $b^{33} \equiv a\,[55]$.

ANNEXE (à rendre avec la copie)