BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

Génie Mécanique

Option A : Productique Mécanique
Option F : Microtechniques

Génie Energétique

Génie Civil

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 4**

Ce sujet comporte 4 pages

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

2 feuilles de papier millimétré sera mise à la disposition des candidats.

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

<u>LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT LES 2 EXERCICES ET LE PROBLEME</u>

Exercice 1 (*5 points*)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1) Pour tout nombre complexe *z*, on pose : $P(z)=z^3+\left(2\sqrt{2}-4\right)z^2+\left(8-8\sqrt{2}\right)z+16\sqrt{2}$.

   a) Calculer $P\left(-2\sqrt{2}\right)$.

   b) Déterminer une factorisation de $P(z)$ sous la forme : $P(z)=\left(z+2\sqrt{2}\right)\left(z^2+\alpha z+\beta\right)$ où α et β sont deux nombres réels que l'on déterminera.

   c) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $P(z)=0$.

2) On note *A*, *B* et *C* les points d'affixes respectives : $a=2+2\mathrm{i}$, $b=2-2\mathrm{i}$ et $c=-2\sqrt{2}$.

   a) Placer les points *A*, *B* et *C* dans le repère $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.
   Démontrer que *A*, *B*, *C* sont sur un même cercle Γ de centre *O*, dont on donnera le rayon.

   b) Déterminer un argument du nombre complexe a puis un argument du nombre complexe b.
   En déduire une mesure en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)$.

   c) Déterminer alors une mesure en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)$.

   d) Démontrer qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)$ est $\frac{3\pi}{8}$.

   e) En déduire l'égalité : $\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)=1+\sqrt{2}$.

Exercice 2 (*4 points*)

Pour former une pièce métallique à partir d'un profilé de 2 centimètres d'épaisseur, on utilise un marteau pilon.
Le marteau pilon frappe toutes les 6 secondes, et à chaque coup, l'épaisseur de métal diminue de 2 %.
On note u_n (n entier naturel) l'épaisseur en millimètres de la pièce après n frappes de marteau pilon.
On a donc $u_0 = 20$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3. On donnera les résultats arrondis au centième de millimètre.
2) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique, et préciser sa raison.
3) Déterminer u_n en fonction de l'entier n.
4) Quelle est l'épaisseur, arrondie au centième de millimètre, de la pièce après 10 frappes ?
5) On considère que la pièce est terminée dès que son épaisseur est inférieure à 14 millimètres. Quel est le temps minimal pour que la pièce soit terminée ?

Problème (*11 points*)

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. (L'unité graphique est 2 cm).

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=x-1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2\ln(x)}{x}$, puis de calculer une aire.

I) Etude d'une fonction auxiliaire g

On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=x^2-4+2\ln(x)$.

1) Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g.
2) Déterminer le sens de variation de la fonction g. (On ne demande pas les limites en 0 et en $+\infty$.)
3) Résolution de l'équation $g(x)=0$.
   a) Démontrer que sur l'intervalle $[1\,;2]$ l'équation $g(x)=0$ possède une solution unique α.
   b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de ce nombre α.
4) Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x, dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

II) Etude de la fonction f

1) Déterminer la limite de f en 0. Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathscr{C}$?
2) Etude en $+\infty$.
   a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b) Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x-1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   c) Déterminer les coordonnées du point A commun à la courbe $\mathscr{C}$ et à la droite $\mathscr{D}$.
   d) Etudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

3) Etude des variations de f.
   a) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f. Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$, où g est la fonction étudiée dans la partie **I**.
   b) En utilisant les résultats de la partie I, dresser le tableau des variations de la fonction f.

4) On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e^2. Montrer que $\mathscr{T}$ est parallèle à l'asymptote $\mathscr{D}$.
5) Dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, tracer la droite $\mathscr{D}$, la tangente $\mathscr{T}$ et la courbe $\mathscr{C}$ à l'aide de l'étude précédente. (On prendra $f(\alpha)\approx 1{,}25$.)

III) Calcul d'une aire

On définit sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ la fonction H par : $H(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+2\ln x-(\ln x)^2$.

1) Démontrer que H est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2) Soit $\mathscr{E}$ la région du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.
   a) Hachurer la région $\mathscr{E}$ sur votre figure.
   b) On note S l'aire, exprimée en unité d'aire, de la région $\mathscr{E}$. Déterminer la valeur exacte de S.
   c) Donner la valeur décimale approchée de cette aire, arrondie au mm^2.

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SÉRIES : STI (toutes spécialités), F10B

STL (spécialités physique de laboratoire et de procédés industriels chimie de laboratoire et de procédés industriels)

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(E(X)\right)^2$

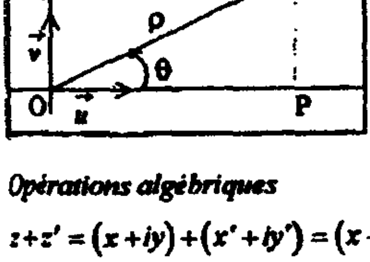
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. *NOMBRES COMPLEXES*

Forme algébrique : $z = x + i\,y$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$



$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$

$\overline{OP} = x = \Re e(z) = \rho\cos\theta$

$\overline{OQ} = y = \Im m(z) = \rho\sin\theta$

$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Opérations algébriques

$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$

$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Conjugué

$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$; $\overline{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$

$x = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$; $y = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

$z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{-y}{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{\rho}e^{-i\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz' = \left(\rho e^{i\theta}\right)\left(\rho' e^{i\theta'}\right) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$

$|zz'| = |z||z'|$

$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \dfrac{\rho}{\rho'}e^{i(\theta - \theta')}$

$\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

$z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

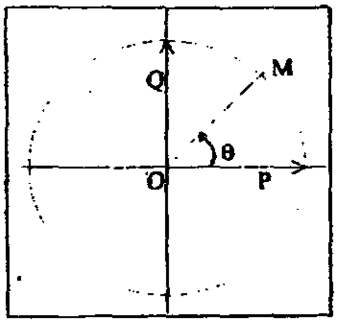
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

C. TRIGONOMÉTRIE



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad ; \quad \sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2a) \; ; \; \sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2a)$

Formules de Moivre

Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$, $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n+1$

III. ANALYSE

A. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$.

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $\ln(1 + x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

2. *Suites* (SÉRIES STI, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)

Si $k > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = +\infty$; si $0 < k < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty, +\infty[$
x	1	$]-\infty, +\infty[$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty, +\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty, +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$

$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$

Si $a \leqslant b$ et $m \leqslant f \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty, +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$