BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2007

Épreuve :

MATHÉMATIQUES

Série : SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LABORATOIRE

Spécialité : BIOCHIMIE GÉNIE BIOLOGIQUE

Durée de l'épreuve : 2 heures Coefficient : 2

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel, distribué par le centre d'examen, est autorisé.

Exercice n°1 (8 points)

On lâche une balle à une hauteur de 1 mètre. Celle-ci effectue alors plusieurs rebonds sur le sol avant de s'immobiliser. On note la hauteur (exprimée en centimètres) par rapport au sol de chaque rebond.

Le tableau ci-dessous donne les résultats obtenus : n

Numéro du rebond : n_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Hauteur du rebond : h_i	55	30	17	9	5	3	1,5	0,8

1) Tracer le nuage de points $M_i(n_i, h_i)$. Un ajustement affine paraît-il justifié ?

Dans la suite de l'exercice, toutes les valeurs numériques seront arrondies au dizième.

2) Recopier et compléter le tableau suivant.

n_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_i = \ln(h_i)$	4,0							

3) Tracer dans un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm) le nuage de points $P_i(n_i, y_i)$. Un ajustement affine paraît-il justifié ?

4) Recherche d'un ajustement affine

a) On note G_1 le point moyen du sous-nuage formé par les points P_1, P_2, P_3 et P_4 et G_2 le point moyen du sous-nuage formé par les points P_5, P_6, P_7 et P_8. Déterminer les coordonnées des points G_1 et G_2.

b) Placer les points G_1 et G_2 sur le graphique et construire la droite (G_1G_2).

c) Lire graphiquement sur le graphique l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur de (G_1G_2) (mettre en évidence sur le graphique les éléments qui ont permis cette lecture).

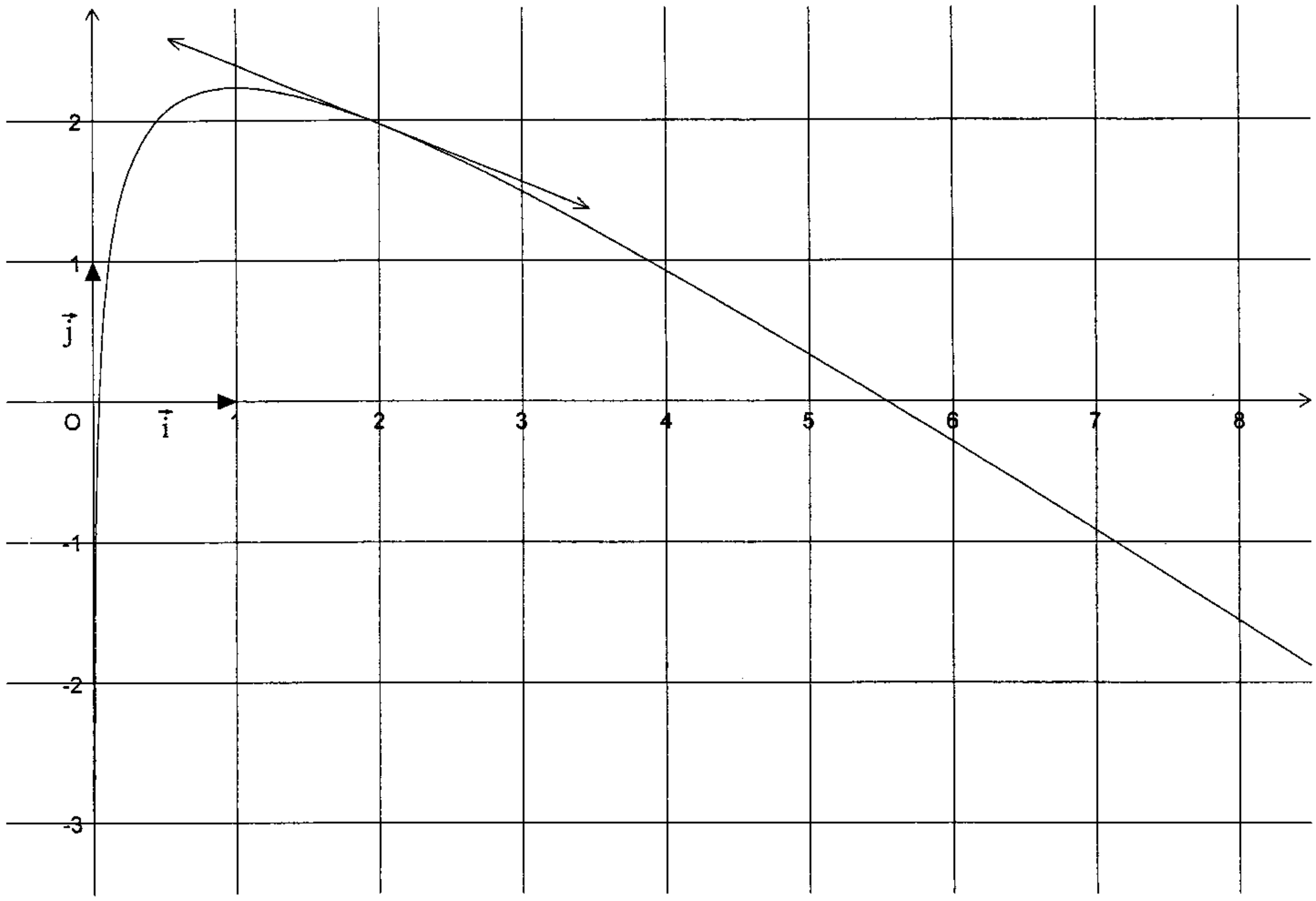
5) En utilisant le résultat de la question 4)c), exprimer, en fonction de son numéro *n*, la hauteur estimée du *n*-ième rebond.

6) À partir de quel rebond, la hauteur estimée de celui-ci est-elle inférieure à un millimètre ?

Exercice n°2 (12 points)

Partie 1 : lecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et sa tangente au point d'abscisse 2.



Déterminer, à l'aide de lectures graphiques, en justifiant par une phrase chaque réponse :

a) $f(3)$ et $f(4{,}5)$;

b) le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ puis une valeur approchée de chacune d'elles ;

c) l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)\leq 1$;

d) $f'(2)$, nombre dérivé de f en 2;

e) le nombre de solution(s) de l'équation $f'(x) = 0$ puis une valeur approchée de chacune d'elle(s) ;

f) l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x)\geq 0$;

g) une estimation de $f'(5)$.

Partie 2 : étude d'une fonction

On admet que la fonction f représentée dans la partie 1 est définie par $f(x)=\ln(x)-\ln(x+2)-\frac{2}{3}x+4$.

a) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$. Que peut-on en déduire ?

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) p est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x)=x^2+2x-3$. Étudier le signe de $p(x)$.

d) Calculer $f'(x)$ puis montrer que $f'(x)=\frac{-2p(x)}{3x(x+2)}$.

e) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$. En déduire le sens de variation de f.

BACCALAURÉAT, SÉRIES STT spécialités comptabilité et gestion, informatique et gestion

STL spécialité biochimie - génie biologique

STI Arts Appliqués

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. STATISTIQUE *(SÉRIES STL, STT)*

Moyenne, variance, écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i \; ; \; V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

II. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad ; \quad P(\Omega) = 1 \quad ; \quad P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

III. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n + 1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

C. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

IV. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. *Fonctions logarithme et exponentielle*

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. *Fonctions puissances*

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS*

Comportement à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Croissances comparées à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, n entier naturel

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$, n entier naturel non nul

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$

(SÉRIES F12, STL)

$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL* *(SÉRIES F12, STT)*

Formule fondamentale

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES (SÉRIE STL)*

Équations	Solutions sur $]-\infty,+\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$