

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

Série : S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures. – COEFFICIENT : 9

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le plan P d'équation $2x + y - 2z + 4 = 0$ et les points A de coordonnées $(3, 2, 6)$, B de coordonnées $(1, 2, 4)$, et C de coordonnées $(4, -2, 5)$.

1.
 - a. Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.
 - b. Vérifier que ce plan est le plan P .
2.
 - a. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
 - b. Écrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan P .
 - c. Soit K le projeté orthogonal de O sur P . Calculer la distance OK .
 - d. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.

3. On considère, dans cette question, le système de points pondérés

$$S = \{(O, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}.$$

- a. Vérifier que ce système admet un barycentre, qu'on notera G .
 - b. On note I le centre de gravité du triangle ABC . Montrer que G appartient à (OI) .
 - c. Déterminer la distance de G au plan P .
4. Soit Γ l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :

$$\|3\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 5.$$

Déterminer Γ . Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à P et Γ ?

Exercice 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances

On suppose connus les résultats suivants :

- La composée de deux similitudes planes est une similitude plane ;
- la transformation réciproque d'une similitude plane est une similitude plane ;
- une similitude plane qui laisse invariants trois points non alignés du plan est l'identité du plan.

Soient A , B et C trois points non alignés du plan et s et s' deux similitudes du plan telles que :

$$s(A) = s'(A), s(B) = s'(B) \text{ et } s(C) = s'(C).$$

Montrer que $s = s'$.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. La figure sera complétée au fur et à mesure. On donne les points A d'affixe 2, E d'affixe $1+i$, F d'affixe $2+i$ et G d'affixe $3+i$.

- a. Calculer des longueurs des côtés des triangles OAG et OEF . En déduire que ces triangles sont semblables.
- b. Montrer que OEF est l'image de OAG par une similitude indirecte S , en déterminant l'écriture complexe de S .
- c. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$. On pose $A' = h(A)$ et $G' = h(G)$, et on appelle I le milieu de $[EA']$. On note σ la symétrie orthogonale d'axe (OI) . Montrer que $S = \sigma \circ h$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$. Étudier le signe de sa fonction dérivée f' , sa limite éventuelle en $+\infty$, et dresser le tableau de ses variations.

2. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par son terme général $u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$.

a. Justifier que, si $n \leq x \leq n+1$, alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.

b. Montrer, sans chercher à calculer u_n , que, pour tout entier naturel n ,

$$f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = (\ln(x+3))^2$.

a. Justifier la dérivabilité sur $[0, +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x , le nombre $F'(x)$.

b. On pose, pour tout entier naturel n , $I_n = \int_0^n f(x) dx$.

Calculer I_n .

4. On pose, pour tout entier naturel n , $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.

Calculer S_n . La suite (S_n) est-elle convergente ?

Exercice 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Pour réaliser une enquête, un employé interroge des personnes prises au hasard dans une galerie commerçante. Il se demande si trois personnes au moins accepteront de répondre.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard accepte de répondre est 0,1. L'employé interroge 50 personnes de manière indépendante. On considère les événements :

A : « au moins une personne accepte de répondre »

B : « moins de trois personnes acceptent de répondre »

C : « trois personnes ou plus acceptent de répondre ».

Calculer les probabilités des événements A, B et C. On arrondira au millième.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire X qui, à tout groupe de n personnes interrogées indépendamment, associe le nombre de personnes ayant accepté de répondre, suit la loi de probabilité définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq n-1, P(X = k) = \frac{e^{-a} a^k}{k!}, \\ \text{et } P(X = n) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{-a} a^k}{k!}, \\ \text{formules dans lesquelles } a = \frac{n}{10}. \end{array} \right.$$

- a. Montrer que la probabilité qu'au moins trois personnes répondent est donnée par :

$$f(a) = 1 - e^{-a} \left(1 + a + \frac{a^2}{2} \right).$$

- b. Calculer $f(5)$. En donner l'arrondi au millième. Cette modélisation donne-t-elle un résultat voisin de celui obtenu à la question 1 ?

3. On conserve le modèle de la question 2. On souhaite déterminer le nombre minimum de personnes à interroger pour que la probabilité que trois d'entre elles au moins répondent soit supérieure ou égale à 0,95.

- a. Étudier les variations de la fonction f définie sur \mathbf{R}^+ par $f(x) = 1 - e^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} \right)$ ainsi que sa limite en $+\infty$. Dresser son tableau de variations.

- b. Montrer que l'équation $f(x) = 0,95$ admet une solution unique sur \mathbf{R}^+ , et que cette solution est comprise entre 6,29 et 6,3.

- c. En déduire le nombre minimum de personnes à interroger.