

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

SÉRIE ES

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

SPECIALITE

Ce sujet comporte 6 pages dont **1 feuille ANNEXE**.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Du papier millimétré est mis à la disposition du candidat.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

La feuille ANNEXE est à rendre avec la copie.

Note importante :

Dès que le sujet de l'épreuve vous est remis, assurez-vous qu'il est complet, en vérifiant le nombre de pages en votre possession.

Si le sujet est incomplet, demandez immédiatement un nouvel exemplaire aux surveillants d'épreuve.

EXERCICE 1 : Commun à tous les candidats (4 points)

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. L'exercice consiste à cocher la réponse exacte sans justification.

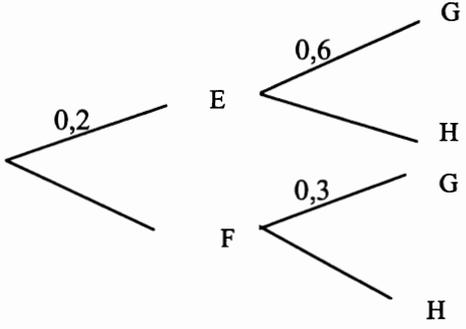
Une bonne réponse apporte 1 point, une mauvaise enlève 0,5 point.

L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Si le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à 0.

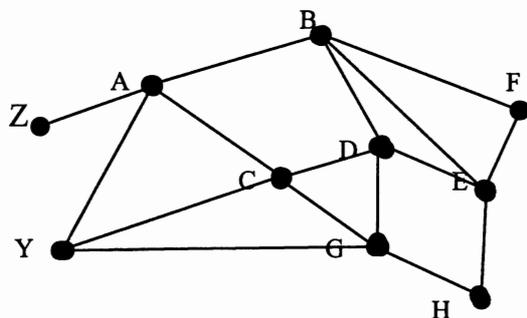
COMPLÉTER LE DOCUMENT RÉPONSE EN ANNEXE.

Rappel : La notation $p_A(B)$ désigne la probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé.

Questions	
1. A et B sont deux événements indépendants tels que $p(A) = 0,7$ et $p(B) = 0,2$.	<input type="checkbox"/> $p(A \cap B) = 0,14$
	<input type="checkbox"/> $p(A \cup B) = 0,9$
	<input type="checkbox"/> $p_A(B) = 0,5$
2. Une pièce de monnaie est telle que la probabilité d'obtenir le côté face est égale à $\frac{1}{3}$. On lance 4 fois de suite cette pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le côté face ?	<input type="checkbox"/> $\frac{18}{81}$
	<input type="checkbox"/> $\frac{72}{81}$
	<input type="checkbox"/> $\frac{65}{81}$
3. On considère l'arbre pondéré ci-dessous. Quelle est la probabilité de $P_H(F)$? 	<input type="checkbox"/> $P_H(F) = 0,7$
	<input type="checkbox"/> $P_H(F) = 0,56$
	<input type="checkbox"/> $P_H(F) = 0,875$
4. Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires. On tire, avec remise, une boule au hasard, n fois de suite (avec $n > 1$). Quelle est la probabilité d'obtenir des boules qui ne soient pas toutes de la même couleur ?	<input type="checkbox"/> $1 - \frac{1}{2^n}$
	<input type="checkbox"/> $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$
	<input type="checkbox"/> $1 - \frac{1}{2^{2n}}$

EXERCICE 2 : Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

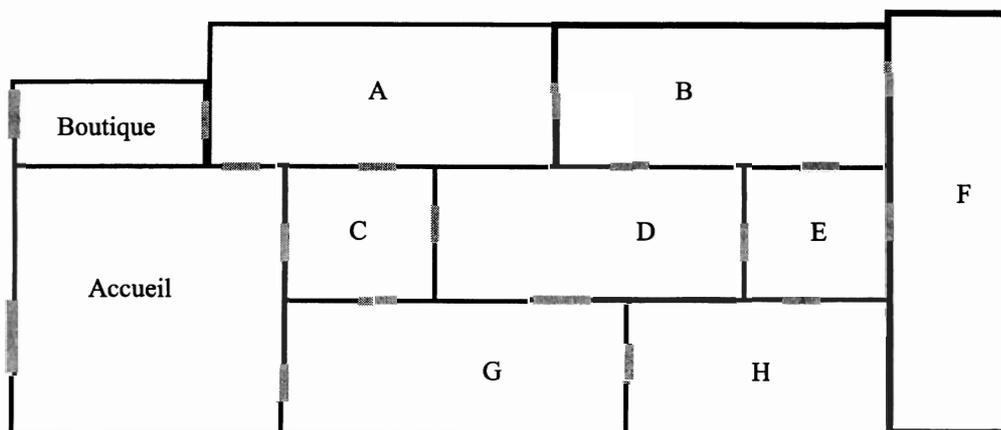
Première Partie : Etude d'un graphe



On considère le graphe ci-dessus.

1. a) Ce graphe est-il connexe ?
b) Déterminer le degré de chacun des sommets.
On pourra donner le résultat sous forme de tableau.
c) Justifier l'existence d'une chaîne eulérienne.
2. a) Déterminer un encadrement du nombre chromatique de ce graphe.
b) Montrer que ce nombre chromatique est égal à 3.

Deuxième Partie : Visite d'un musée



Voici le plan d'un musée : les parties grisées matérialisent les portes et les visiteurs partent de l'accueil, visitent le musée et doivent terminer leur visite à la boutique.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe en précisant ce que représentent arêtes et sommets.
2. a) Pourquoi est-il possible de trouver un circuit où les visiteurs passent une fois et une seule par toutes les portes ?
b) Donner un exemple d'un tel circuit.
3. Comment colorier les salles y compris l'accueil et la boutique, en utilisant un minimum de couleurs, pour que 2 salles qui communiquent par une porte aient des couleurs différentes ?

EXERCICE 3 : Commun à tous les candidats (5 points)

Dans tout l'exercice, le détail des calculs statistiques n'est pas demandé.

Les résultats seront arrondis à 10^{-3} .

On rappelle que l'image d'un réel x par la fonction exponentielle peut être notée $\exp(x) = e^x$

On veut étudier l'évolution des records de l'épreuve d'athlétisme du 100 mètres masculin. Pour cela, on cherche un ajustement des records pour en prévoir l'évolution.

On donne dans le tableau suivant certains records, établis depuis 1900.

Année	1900	1912	1921	1930	1964	1983	1991	1999
Rang de l'année, x_i	0	12	21	30	64	83	91	99
Temps en secondes, y_i	10,80	10,60	10,40	10,30	10,06	9,93	9,86	9,79

1) Étude d'un modèle affine

- a) Construire le nuage de points $M_i (x_i ; y_i)$, avec i compris entre 1 et 8, associé à cette série statistique double. On prendra comme unité graphique 1 cm pour dix ans en abscisse et 1 cm pour un dixième de seconde en ordonnées.

On commencera les graduations au point de coordonnées (0 ; 9).

- b) Peut-on envisager un ajustement affine à court terme ? Cet ajustement permet-il des prévisions pertinentes à long terme sur les records futurs?

2) Étude d'un modèle exponentiel

Après étude, on choisit de modéliser la situation par une autre courbe.

On effectue les changements de variables suivants :

$$X = e^{-0,00924x} \text{ et } Y = \ln y.$$

On obtient le tableau suivant :

$X_i = e^{-0,00924 x_i}$	1	0,895	0,824	0,758	0,554	0,464	0,431	0,401
$Y_i = \ln y_i$	2,380	2,361	2,342	2,332	2,309	2,296	2,288	2,281

- a) Donner une équation de la droite de régression de Y en X obtenue par la méthode des moindres carrés.

- b) En déduire que l'on peut modéliser une expression de y en fonction de x sous la forme suivante : $y = \exp (a e^{-0,00924 x} + b)$ où a et b sont deux réels à déterminer.

- c) À l'aide de cet ajustement, quel record du 100 mètres peut-on prévoir en 2010 ?

- d) Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur \mathbb{R} par l'expression suivante :

$$f(t) = \exp (0,154 e^{-0,00924 t} + 2,221)$$

- e) Que peut-on en conclure, en utilisant ce modèle, quant aux records du cent mètres masculin, à très long terme ?

EXERCICE 4 : Commun à tous les candidats (6 points)

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

PREMIÈRE PARTIE

On considère une fonction g définie sur l'intervalle $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ par :

$$g(x) = -x^2 + ax - \ln(2x + b), \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Calculer a et b pour que la courbe représentative de g dans un plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) passe par l'origine du repère et admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

DEUXIÈME PARTIE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ par :

$$f(x) = -x^2 + 2x - \ln(2x + 1).$$

On admet que f est dérivable et on note f' sa dérivée.

Le tableau de variation de la fonction f est le suivant :

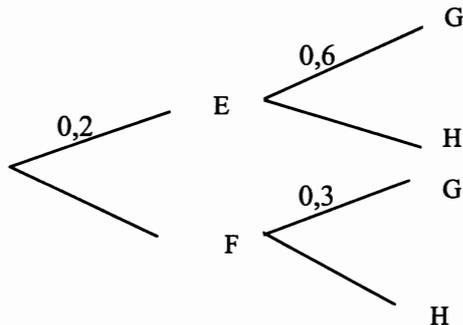
x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$			
signe de $f'(x)$		-	0	+	0	-	
variations de f	$+\infty$	\searrow	0	\nearrow	$\frac{3}{4} + \ln(\frac{1}{2})$	\searrow	$-\infty$

1) Justifier tous les éléments contenus dans ce tableau.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[\frac{1}{2}; 1]$.

b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

3) Déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

Questions	
1. A et B sont deux événements indépendants tels que $p(A) = 0,7$ et $p(B) = 0,2$.	<input type="checkbox"/> $p(A \cap B) = 0,14$
	<input type="checkbox"/> $p(A \cup B) = 0,9$
	<input type="checkbox"/> $p_A(B) = 0,5$
2. Une pièce de monnaie est telle que la probabilité d'obtenir le côté face est égale à $\frac{1}{3}$. On lance 4 fois de suite cette pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le côté face ?	<input type="checkbox"/> $\frac{18}{81}$
	<input type="checkbox"/> $\frac{72}{81}$
	<input type="checkbox"/> $\frac{65}{81}$
3. On considère l'arbre pondéré ci-dessous. Quelle est la probabilité de $P_H(F)$? 	<input type="checkbox"/> $P_H(F) = 0,7$
	<input type="checkbox"/> $P_H(F) = 0,56$
	<input type="checkbox"/> $P_H(F) = 0,875$
4. Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires. On tire, avec remise, une boule au hasard, n fois de suite (avec $n > 1$). Quelle est la probabilité d'obtenir des boules qui ne soient pas toutes de la même couleur ?	<input type="checkbox"/> $1 - \frac{1}{2^n}$
	<input type="checkbox"/> $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$
	<input type="checkbox"/> $1 - \frac{1}{2^{2n}}$