BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Du papier millimétré est mis à la disposition du candidat.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

**Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.**

EXERCICE 1 (3 points)

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit (P) le plan dont une équation est : $2x + y - 3z + 1 = 0$.
Soit A le point de coordonnées (1, 11, 7).

Proposition 1 :
« le point H, projeté orthogonal de A sur (P), a pour coordonnées (0, 2, 1) ».

2) On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2 - 2y$.
On appelle u la solution de (E) sur **R** vérifiant $u(0) = 0$.

Proposition 2 : « on a $u\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ ».

3) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$.

Proposition 3 : « pour tout entier naturel *n*, on a $0 \leq u_n \leq 7$ ».

EXERCICE 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).
On fera une figure que l'on complétera tout au long de cet exercice.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 3+5i$, $b = -4+2i$ et $c = 1+4i$.

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2-2i)z+1$.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

2) a) Déterminer l'affixe du point B' image du point B par f.

   b) Montrer que les droites (CB') et (CA) sont orthogonales.

3) Soit M le point d'affixe $z = x + iy$, où on suppose que x et y sont des entiers relatifs.
   Soit M' l'image de M par f.

   Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.

4) On considère l'équation (E) : $x + 3y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

   a) Vérifier que le couple $(-4,2)$ est une solution de (E).

   b) Résoudre l'équation (E).

   c) En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5,5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ soient orthogonaux.
   Placer ces points sur la figure.

EXERCICE 3 (5 points)

Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties.
La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2.
Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;
- s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

1) On appelle :
   E_1 l'événement « le joueur perd la première partie » ;
   E_2 l'événement « le joueur perd la deuxième partie » ;
   E_3 l'événement « le joueur perd la troisième partie ».

   On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.

   On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

   a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

   b) Montrer que la probabilité de l'événement $(X = 2)$ est égale à 0,031 et que celle de l'événement $(X = 3)$ est égale à 0,002.

   c) Déterminer la loi de probabilité de X.

   d) Calculer l'espérance de X.

2) Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'événement : « le joueur perd la n-ième partie », $\overline{E_n}$ l'événement contraire, et on note p_n la probabilité de l'événement E_n.

   a) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, les probabilités des événements $E_n \cap E_{n+1}$ et $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ en fonction de p_n.

   b) En déduire que $p_{n+1} = 0{,}05p_n + 0{,}05$ pour tout entier naturel n non nul.

3) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \frac{1}{19}$.

   a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, u_n puis p_n en fonction de n.

   c) Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4 (7 points)

1) **Restitution organisée de connaissances.**

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

On supposera connus les résultats suivants :

- la fonction exponentielle est dérivable sur **R** et est égale à sa fonction dérivée ;
- $e^0 = 1$;
- pour tout réel x, on a $e^x > x$.
- Soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A, +\infty[$ où A est un réel positif.
  Si pour tout x de $[A, +\infty[$ $\psi(x) \leq \varphi(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

a) On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

Montrer que pour tout x de $[0, +\infty[$, $g(x) \geq 0$.

b) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

2) On appelle f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}$.

On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
La courbe C est représentée en annexe page 6.

a) Montrer que f est positive sur $[0, +\infty[$.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour C.

c) Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $[0, +\infty[$.

3) On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

a) Montrer que F est une fonction strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}}$.

c) Calculer la limite de F en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de F sur $[0, +\infty[$.

d) Justifier l'existence d'un unique réel positif α tel que $F(\alpha) = 0{,}5$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

4) Soit n un entier naturel non nul. On note A_n l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan située entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.
Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $A_n \geq 0{,}5$.

ANNEXE

Cette page ne sera pas à remettre avec la copie.

EXERCICE 4