BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2011

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT E — *CODE : MATGRE*

Durée : 1,5 heure

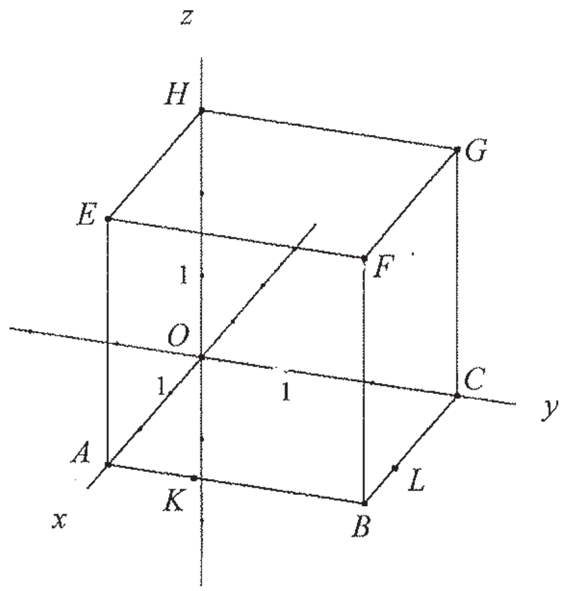
SPÉCIALITÉ	COEFFICIENT
CONCEPTEUR EN ART ET INDUSTRIE CÉRAMIQUE	1,5
DESIGN DE COMMUNICATION ESPACE ET VOLUME	1,5
DESIGN D'ESPACE	1,5
DESIGN DE PRODUIT	1,5

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
Tout autre matériel est interdit.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 3 pages, numérotées de 1/3 à 3/3.
Le formulaire de mathématiques est joint au sujet.
Une feuille de papier millimétré est fournie.

EXERCICE 1 (10 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k}\ )$ d'unité graphique 1 cm.



On a représenté ci-dessus un cube *ABCOEFGH* d'arête 3 cm.

On appelle K le point de $[AB]$ tel que : $AK = \frac{1}{3}AB$, et L le point de $[BC]$ tel que : $BL = \frac{1}{3}BC$.

A. Étude du triangle KLF

1° Donner les coordonnées des points B, F, K et L.

2° Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FK}$ et $\overrightarrow{FL}$ ont pour coordonnées :

$$\overrightarrow{FK}\ (0, -2, -3) \text{ et } \overrightarrow{FL}\ (-1, 0, -3).$$

3° a) Calculer les valeurs exactes de $\left\|\overrightarrow{FK}\right\|$; $\left\|\overrightarrow{FL}\right\|$ et $\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{FL}$.

b) En déduire la valeur approchée arrondie à 10^{-1} de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{KFL}$.

4° a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FK} \wedge \overrightarrow{FL}$.

b) En déduire que l'aire du triangle KFL est égale à 3,5 cm^2.

B. Étude du solide tronqué AKLCOEFGH

On enlève au cube *ABCOEFGH* de départ, le tétraèdre *KBLF*. On obtient ainsi le solide tronqué *AKLCOEFGH*.

1° Donner sans justification la nature des faces du solide tronqué *AKLCOEFGH*.

2° Montrer que l'aire totale de toutes les faces du solide *AKLCOEFGH* est égale à 52 cm^2.

3° Calculer le volume du solide *AKLCOEFGH*.

(On rappelle que le volume de la pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}B \times h$ où B est l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide.)

EXERCICE 2 (10 points)

On utilise un modèle de Bézier pour créer un logo.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$ d'unité graphique 4 cm, on considère les points : $P_0(0, 0)$; $P_1(1, 0)$; $P_2(1, 1)$ et $P_3(0, 2)$.
La courbe de Bézier $\mathscr{C}$ définie par les quatre points de contrôle P_0, P_1, P_2, P_3 est l'ensemble des points $M(t)$ tels que pour tout t de l'intervalle $[0, 1]$:

$$\overrightarrow{OM}(t) = (1-t)^3\,\overrightarrow{OP_0} + 3t\,(1-t)^2\,\overrightarrow{OP_1} + 3t^2\,(1-t)\,\overrightarrow{OP_2} + t^3\,\overrightarrow{OP_3}.$$

1° Démontrer que les coordonnées x et y des points $M(t)$ de cette courbe ont pour expression :

$$x = f(t) = -3t^2 + 3t \quad \text{et} \quad y = g(t) = -t^3 + 3t^2.$$

2° Étudier les variations des fonctions f et g, définies sur $[0, 1]$ par :

$$f(t) = -3t^2 + 3t \text{ et } g(t) = -t^3 + 3t^2.$$

Rassembler les résultats dans un tableau unique.

3° a) Donner un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en chacun des points P_0, obtenu pour $t = 0$, $M\left(\dfrac{1}{2}\right)$, obtenu pour $t = \dfrac{1}{2}$ et P_3, obtenu pour $t = 1$.

Sur une feuille de papier millimétré, placer ces points dans le repère défini ci-dessus et tracer les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ correspondantes.

b) Placer le point P_2 sur la figure.

Que représente le vecteur $\overrightarrow{P_2P_3}$ pour la courbe $\mathscr{C}$?

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.