BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2010

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT F *CODE : MATGRF*

Durée : 1,5 heure

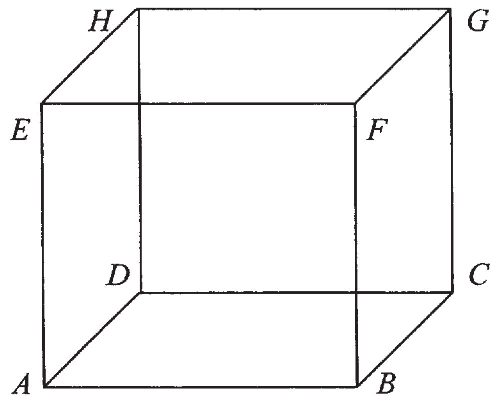
SPECIALITE	COEFFICIENT
DESIGN DE COMMUNICATION ESPACE ET VOLUME	1,5
DESIGN D'ESPACE	1,5
DESIGN DE PRODUIT	1,5

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 3 pages, numérotées de 1/3 à 3/3.
Le formulaire de mathématiques est joint au sujet.
Une feuille de papier millimétré est fournie.

EXERCICE 1 (7 points)

Le solide représenté sur la figure est un cube de côté 3 cm.



1. On désigne par I le milieu du segment $[BC]$.
Dans cet exercice, on admet que les droites (HD) et (DI) sont perpendiculaires.

a) Justifier que $AH = 3\sqrt{2}$, $IA = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ et $HI = \dfrac{9}{2}$.

b) Démontrer que $\cos \widehat{HIA} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

c) En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{HIA}$. Arrondir à 10^{-1}.

2. a) On désigne par V le volume de la pyramide $HAID$. Montrer que $V = \dfrac{9}{2}$.

On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide.

b) Dans cette question, on admet que $\sin \widehat{HIA} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Ce résultat n'a pas à être démontré.
En déduire la valeur exacte de l'aire du triangle HIA.

c) Déduire de ce qui précède la valeur exacte de la distance du point D au plan défini par le triangle HIA.

EXERCICE 2 (13 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\,)$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points : $P_0(0, 3)$; $P_1(0, 7)$ et $P_2(5, 3)$.
La courbe de Bézier $\mathscr{C}_1$ définie par ces points de contrôle est l'ensemble des points $M_1(t)$ tels que pour tout t de l'intervalle $[0, 1]$:

$$\overrightarrow{OM_1}\,(t) = (1-t)^2\,\overrightarrow{OP_0} + 2t\,(1-t)\,\overrightarrow{OP_1} + t^2\,\overrightarrow{OP_2}\,.$$

1. Démontrer que les coordonnées x_1 et y_1 des points $M_1(t)$ de cette courbe ont pour expression

$$x_1 = f_1(t) = 5t^2 \quad \text{et} \quad y_1 = g_1(t) = -\,8t^2 + 8t + 3.$$

2. Étudier les variations des fonctions f_1 et g_1, définies sur $[0, 1]$ par $f_1(t) = 5t^2$ et $g_1(t) = -\,8t^2 + 8t + 3$. Rassembler les résultats dans un tableau unique.

3. a) Donner un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ en chacun des points P_0, (obtenu pour $t = 0$), $M_1(1/2)$ et P_2 (obtenu pour $t = 1$). Sur une feuille de papier millimétré, placer ces points dans le repère défini ci-dessus et tracer les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_1$ correspondantes.
b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_1$.

4. On considère maintenant les points de contrôle :

$$P_0(0, 3)\ ;\ P_3(0, -1)\ ;\ P_4(10, -1) \text{ et } P_2(5, 3).$$

On admet que la courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$ définie par ces quatre points est l'ensemble des points $M_2(t)$ de coordonnées

$$x_2 = f_2(t) = 30t^2 - 25t^3 \quad \text{et} \quad y_2 = g_2(t) = 12t^2 - 12t + 3\,,$$

où t appartient à l'intervalle $[0, 1]$.
Le tableau des variations conjointes des fonctions f_2 et g_2, définies sur $[0, 1]$ par $f_2(t) = 30t^2 - 25t^3$ et $g_2(t) = 12t^2 - 12t + 3$ est le suivant :

t	0		0,5		0,8		1
$f_2'(t)$	0	+	11,25	+	0	−	− 15
$f_2(t)$	0	↗		↗	6,4	↘	5
$g_2'(t)$	− 12	−	0	+		+	12
$g_2(t)$	3	↘	0	↗		↗	3

Montrer que les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont la même tangente aux points P_0 et P_2.

5. *Dans cette question, tous les tracés sont à effectuer sur la figure du 3.* .
a) Donner un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point $M_2(1/2)$. Placer le point $M_2(1/2)$.
b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_2$.