Enseigner les fonctions en seconde
Fabriquer et faire vivre une organisation mathématique régionale

Michèle Artaud et Ghilaine Menotti, IUFM Aix-Marseille & Alsace

Un des points cruciaux des difficultés que nous voulons mettre en évidence à l'égard de l'enseignement du secteur des fonctions en classe de seconde réside dans le changement de programme de cette classe qui a eu lieu en 1999 et qui a vu la disparition du secteur algébrique et son intégration dans le secteur des fonctions. On rompt ainsi un peu subrepticement avec une tradition solidement ancrée, sans que des raisons de cette rupture soient avancées ou encore que l'on détaille suffisamment les organisations mathématiques[1], en un certain sens inédites, qu'il s'agit désormais de faire vivre.

En effet, le programme publié en août 1999 comporte trois domaines d'étude : *Calcul et fonctions*, *Statistique* et *Géométrie*. L'algébrique se trouve alors inséré dans le secteur des fonctions, comme en témoigne l'extrait suivant (MEN 1999) :

> Le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révision systématique, mais se retrouvent au travers des différents chapitres. *En particulier, ils seront traités en relation étroite avec l'étude des fonctions*. (C'est nous qui soulignons.)

Le programme antérieur, qui datait de l'année 1990, était par contraste structuré en quatre domaines : *Statistique*, *Géométrie*, *Fonctions* et *Problèmes numériques et algébriques*. On notera que le lien avec les fonctions était déjà souligné dans l'entête consacrée aux problèmes numériques et algébriques que nous reproduisons ci-dessous (MEN 1990) :

> *La résolution de problèmes*, issus de la géométrie, de l'étude des fonctions, de la gestion de données, des autres disciplines et de la vie courante *constitue l'objectif fondamental* de cette partie du programme. On dégagera sur les exemples étudiés les différentes phases du traitement d'un problème : mise en équation, résolution, contrôle et exploitation des résultats.
>
> Dans cette perspective, le programme vise à compléter et à mobiliser les capacités acquises au collège ; les travaux s'articulent suivant deux axes :
>
> – Consolider la *pratique conjointe du calcul littéral et du calcul numérique*, en relation étroite avec l'étude des fonctions.
> – Poursuivre l'étude des *équations et inéquations à une inconnue* et des *systèmes d'équations linéaires*.
>
> Dans le cadre de ces travaux, un objectif important est d'amener les élèves à une *meilleure maîtrise de l'emploi de variables*, à travers l'étude d'exemples où elles expriment des quantités dont la signification est clairement perçue ; les travaux se développeront dans les directions suivantes : substitution de nombres à des variables (utilisation d'expressions littérales pour des travaux numériques, tableaux de valeurs de fonctions…), mise en équation de problèmes et description de phénomènes continus à l'aide de fonctions.

Le programme publié en 1999 met donc plus nettement en avant le lien entre les fonctions et le calcul algébrique en supprimant le domaine *Problèmes numériques et algébriques* et en intégrant l'algèbre dans le secteur des fonctions, plus spécialement dans les deux derniers thèmes d'étude du

1. Sur les notions d'organisations mathématiques et de thèmes et de secteurs, voir par exemple Chevallard 200x.

programme (MEN 1999) :

Fonctions et formules algébriques.	Reconnaître la forme d'une expression algébrique (somme, produit, carré, différence de deux carrés). Identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ quand f est donnée par une formule. Reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée…). Modifier une expression, la développer, la réduire selon l'objectif poursuivi.	Les activités de calcul doivent être l'occasion de raisonner et de démontrer. On évitera une activité trop mécanique et on s'efforcera de développer, avec des expressions littérales faisant intervenir une seule lettre, deux plus rarement, des stratégies s'appuyant sur l'observation, l'anticipation et l'intelligence du calcul. On multipliera les approches et on explicitera quelques procédures simples permettant d'infirmer ou de confirmer une formule. À l'occasion de certains travaux sur tableur, on distinguera la recherche et l'observation d'une loi empirique de la démonstration d'une formule. Des activités liées aux fonctions, aux équations ou aux inéquations mettront en valeur l'information donnée par la forme d'une expression et motiveront la recherche d'une écriture adaptée.
Mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d'équations et d'inéquations.	Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré. Utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonc-tion. Résoudre graphiquement des équations ou inéqua-tions du type : $f(x) = k$; $f(x) < k$; $f(x) = g(x)$; $f(x) < g(x)$; …	Pour un même problème, on combinera les apports des modes de résolution graphique et algébrique. On précisera les avantages et les limites de ces différents modes de résolution. On pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives. On ne s'interdira pas de donner un ou deux exemples de problème conduisant à une équation qu'on ne sait pas résoudre algébriquement et dont on cherchera des solutions approchées.

Pour insister sur ce point, le document d'accompagnement du programme, disponible au deuxième trimestre de l'année 2000, explicitera ainsi les attentes à l'égard de l'étude des équations et des inéquations sous la rubrique « Mise en équation ; résolution algébrique et graphique d'équations et d'inéquations », en soulignant l'intérêt du recours à la représentation graphique et à la calculatrice graphique (MEN 2000) :

> Un élève ayant à résoudre une équation comme $(x-2)^2 = 9$ perçoit assez facilement que l'égalité est bien vérifiée pour $x = 5$ et il se contente alors de donner cette seule solution ; il a même souvent quelques réticences à mettre en œuvre toute technique permettant d'aboutir à l'ensemble des solutions. La représentation graphique de la fonction $x \mapsto (x-2)^2$ qui met bien en évidence l'existence de deux solutions incitera à dépasser le premier raisonnement. Pour la résolution de $x^2 + 2x + 3 = 0$, on peut là aussi s'appuyer sur la représentation graphique qui montre bien l'absence de solution, confirmée ensuite par $(x+1)^2 + 2 = 0$; il peut être intéressant aussi de laisser un élève développer l'expression, tenter de la factoriser, proposer comme solution $x = -3 / (x + 2)$ et le faire réfléchir sur sa proposition. De même, une calculatrice graphique montre facilement que les équations $x\ (x + 1) = (2x + 3)\ (x + 1)$ et $x = 2x + 3$ n'ont pas les mêmes solutions.
>
> Un autre exemple est l'utilisation de la représentation graphique de la fonction $x \mapsto x^2 + 3x - 10$ pour conjecturer que 2 est une solution de l'équation $x^2 + 3x - 10 = 0$; le calcul permet de vérifier facilement que c'est bien le cas ; il reste à anticiper un peu sur la factorisation et à vérifier que $(x-2)\ (x+5)$ est bien une écriture possible pour l'expression $x^2 + 3x - 10$ pour

aboutir à la résolution de l'équation $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Les auteurs concluent : « Ces quelques exemples montrent comment le point de vue des fonctions peut enrichir la réflexion sur la résolution d'équations. Ces remarques s'appliquent encore plus à la résolution d'inéquations puisque l'ensemble des solutions ne se réduit presque jamais à une seule valeur. »

Le style de technique qu'il s'agit de pousser en avant doit donc articuler travail algébrique et travail fonctionnel, les fonctions jouant ici le rôle tantôt de *média* en donnant des informations sur les solutions, tantôt de *milieu* en permettant de mettre à l'épreuve le calcul algébrique effectué.

Mais la technique à mettre en place n'est pas véritablement détaillée, et le document d'accompagnement n'est pas davantage explicite sur d'autres thèmes du programme comme par exemple celui des formes algébriques (MEN 2000) :

Les différentes capacités attendues qui sont listées dans ce paragraphe doivent être développées essentiellement en liaison avec les autres rubriques : organisation de calcul, étude des fonctions, résolution d'équations et d'inéquations… L'utilisation d'une calculatrice avec un éditeur d'expression (les calculs ne se font pas au fur et à mesure mais à partir de l'entrée de toute une expression) ou mieux d'un tableur permet une approche quasiment expérimentale des modifications d'écriture possibles et des identités usuelles : comme il est dit dans le § I.8 de ce document, on insistera sur le fait que la calculatrice ou le tableur permettent simplement de vérifier de façon empirique que deux expressions sont égales pour un certain nombre de valeurs prises par la variable (plus rarement par les variables) mais que seul, le calcul algébrique permet d'établir « l'identité » des deux expressions. On exploitera les possibilités des calculatrices pour enrichir la réflexion sur les différentes formes possibles qu'une expression peut prendre et sur les questions auxquelles chacune de ces formes permet de répondre. On n'atteindra une certaine maîtrise du calcul algébrique que si on développe une aptitude à anticiper les effets d'une modification d'écriture. C'est pourquoi on ne séparera pas l'étude des différentes techniques des traitements envisagés.

Cette nouvelle structuration du programme – dont le contenu, on le verra plus loin, s'avère très fonctionnel bien que cette fonctionnalité ne soit que peu lisible – ne facilite pas l'existence du calcul algébrique ni la fabrication de l'organisation mathématique relative aux fonctions dès lors qu'on la considère comme une contrainte.

Voici par exemple des programmations thématiques sur l'année, en vigueur pour l'année scolaire 2007-2008 dans quelques lycées (PC) ou classes de seconde (PS) de l'académie d'Aix-Marseille.

PC1
Nombres et calculs
Statistiques I
Équations et inéquations
Fonctions
Transformations du plan, triangles isométriques et de même forme
Repérage dans le plan, vecteurs
Équations de droites, systèmes d'équations linéaires
Fonctions de référence
Statistique II
Géométrie dans l'espace
Trigonométrie
Ordre et valeur absolue

PS1
Fonctions (généralités)
Géométrie dans l'espace
Les nombres

Triangles isométriques
Équations
Statistique descriptive
Nombres premiers
Fonctions (variations, extrema…)
Triangles semblables
Fonctions affines. Inéquations
Vecteurs
Ordre et valeur absolue
Géométrie dans l'espace (Orthogonalité)
Fonctions de référence
Vecteurs, géométrie analytique
Droites et systèmes

PS2
Les nombres
Configurations planes
Ordre dans **R**
Vecteurs et colinéarité
Fonctions : généralités et lecture graphique
Voir et calculer dans l'espace
Statistiques
Géométrie analytique
Calcul littéral et équations
Triangles isométriques et semblables
Fonctions affines
Équations de droites et systèmes
Inéquations et étude de signe
Démontrer dans l'espace
Fonctions carrée et inverse
Fonctions trigonométriques
Simulation

PC2

Période Nombre de semaines	En analyse	En géométrie
1er TRIMESTRE		
Sept. 4 sem.	Fonctions, R, calculatrices, Nombres premiers 1 + 2	Configuration du plan et de l'espace 9
Oct. 3,5 sem	Fonctions linéaires et affines 3	Transformations du plan, triangles isométriques et semblables 10
Toussaint		
Nov 3,5	Équations, inéquations, systèmes, tableaux de signes 5	Transformations du plan, triangles isométriques et semblables 10
2e TRIMESTRE		
Déc. 3 DC 1	Statistiques 6	Repérage du plan, vecteurs 11
Noël		
Janv. 3,5	Fonctions de références 4	Repérage du plan, vecteurs 11
Févr. 2	Droites et systèmes 12	Géométrie dans l'espace 8
Vacances d'hiver		
Mars 4,5	Simulations d'expériences aléatoires 7	Orthogonalité, distances dans l'espace 8

3e TRIMESTRE	[redacted]	
Avril 1 sem.		
Vacances de printemps		
Avril DC n°2	Fonctions trigonométriques et enroulement 4	Synthèse et compléments
Mai	Thèmes et synthèses	Thèmes et synthèses
Juin		

La plupart d'entre elles utilisent une structuration thématique qui suit globalement l'ordre de présentation du programme sur les fonctions et qui scinde l'étude des fonctions en au moins deux parties : généralités sur les fonctions et fonctions de références, mais qui sépare les thèmes algébriques du travail à leur propos, le thème « fonctions et formules algébriques » étant absent des programmations.

On voit apparaître là un point essentiel, nous semble-t-il, des difficultés rencontrées : le manque d'articulation des différents composants de l'organisation mathématique mise en place, en raison notamment d'un manque de « fonctionnalisation » de ces différents composants et d'une vision trop thématique du secteur à étudier.

Voici par exemple l'organisation mathématique qu'un élève-professeur de l'IUFM d'Aix-Marseille avait constituée avant d'aborder le secteur des fonctions[2]. Cette analyse se présente sous la forme d'un fichier Excel comportant 3 feuilles : la première détaille les types de tâches et les techniques de l'OMR (organisation mathématique régionale, correspondant au secteur) selon le programme et les ouvrages pour la classe de seconde ; la deuxième, les raisons d'être de l'OM à étudier ; la troisième, une analyse de l'OM relative aux fonctions qui a dû être étudiée au collège dont on ne parlera pas ici. On trouvera ci-dessous l'analyse de l'OMR à étudier (pour des raisons pratiques, nous présentons « linéairement » ce qui, dans le fichier proposé, figure en deux colonnes) :

T1 identifier variable et ensemble de définition (fonction définie par courbe, tableau, formule) ;
τ1 : courbe: abscisse (x) ; tableau : 1re ligne ou colonne ; formule : variable de la formule (x ou autre) ;
T11 : dans quelques rares cas l'ensemble de définition ;
τ11 : cas fonction définie par formule: trouver les x pour lesquels on ne peut pas calculer l'image ;
T2 déterminer l'image d'un nombre (fonction définie par courbe, tableau, formule) ;
τ2 : courbe : tracer la verticale passant par ce nombre ; tableau : case correspondante au nombre donné ; formule : remplacer la variable par le nombre.
T3 décrire comportement d'une fonction définie par courbe…
τ3 : placer des flèches montantes ou descendantes en lisant la courbe de gauche à droite ; lire les abscisses des points extrémaux et de changement de sens ;
T31 : avec tableau variation ;
τ31 : placer les flèches dans même ordre que celles de la courbe ; ajouter les abscisses puis les ordonnées des points extrémaux et de changement de sens ;
T32 : avec vocabulaire adapté ;
τ32 : flèches montantes : fonction croissante (id. décroissante) de … à … (abscisses des points)
T4 dessiner une représentation graphique à partir d'un tableau de variations ;
τ4 : placer les points extrémaux et de changement de sens ; relier ces points par un trait continu en suivant les flèches
T51 : établir le sens de variations et représenter graphiquement $x \to x^2$;
τ51 : démontrer croissance sur **R**+ et décroissance sur **R**- ; tableau de variation; calculer 1 point; savoir que la fonction est paire ;
T52 établir le sens de variations et représenter graphiquement $x \to 1/x$;
τ52 : démontrer décroissance sur **R**–* et sur **R**+* ; calculer un point ; savoir que la fonction est impaire ;
T6 connaître la représentation graphique de $x \to \sin x$ et $x \to \cos x$;

2 Ce document a été communiqué au mois de novembre 2007 pour servir de point d'appui dans le Séminaire de formation au travail d'une question posée par un élève professeur. Voir Artaud et Jullien 2008.

$\tau 6$: connaître la représentation graphique sur $[0;2\pi]$ (savoir calculer les points d'abscisse:0 ; $\pi/2$;π ;$3\pi/2$;2π et connaître allure) et tracer par périodicité.

T7 caractériser les fonctions affines par l'accroissement de la fonction est proportionnel à accroissement de la variable

T8 reconnaître la forme d'une expression algébrique (somme, produit, carré, différence de 2 carrés) ;

T9 identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ (fonction donnée par une formule) ;

T10 reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la plus adaptée (donc savoir anticiper les effets d'une modification d'écriture) : réduite, factorisée; lier l'étude des différentes techniques et traitements envisagés ;

T11 modifier, développer, réduire une expression selon l'objectif poursuivi ;
mise en équation ?

T12 résoudre une équation ou inéquation se ramenant au 1er degré ;

T13 utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction ;

T14 résoudre graphiquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$; $f(x) < k$; $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$.

On notera d'abord que l'OM était en cours de constitution, ce qui peut expliquer par exemple l'absence de l'environnement technologico-théorique, mais qu'elle donne une bonne idée des aspects problématiques même quand le travail a l'ambition d'être mené au niveau du secteur.

On voit en effet apparaître, au delà des quelques maladresses d'analyse du débutant, une succession de types de tâches et de techniques associées qui reflète la structuration du programme sans que leur fonctionnalité soit recherchée. On aboutit alors à une juxtaposition d'organisations mathématiques ponctuelles (dont les blocs technologico-théoriques resteraient à élucider), leur articulation n'étant pas manifeste.

On notera également que certains types de tâches n'en sont pas véritablement, comme par exemple les deux énoncés suivants :

T51 établir le sens de variations et représenter graphiquement $x \to x^2$;

$\tau 51$: démontrer croissance sur R+ et décroissance sur R- ; tableau de variation; calculer 1 point; savoir que la fonction est paire ;

T52 établir le sens de variations et représenter graphiquement $x \to 1/x$ *;*

$\tau 52$: démontrer décroissance sur R-* et sur R+* ; calculer un point ; savoir que la fonction est impaire ;

On a en effet à faire ici à deux tâches, spécimens du type « établir le sens de variation et représenter graphiquement une fonction donnée par son expression algébrique » qui n'apparaît pas dans l'analyse de l'OM du professeur. En outre la fonction de ces tâches au sein de l'organisation mathématique étudiée n'est pas élucidée[3].

Des raisons d'être, on l'a dit, sont avancées :

Optimiser une situation

Exemple : maximiser une aire, minimiser un coût, …

Décrire exhaustivement un phénomène

On peut alors connaître d'autres valeurs, analyser le phénomène, …

Mais ces types de tâches ne sont pas reliés aux types de tâches de l'OMR que le professeur a identifiés par ailleurs, on l'a vu, ce dont témoigne entre autres l'incertitude liée à la « mise en équation ».

On pourrait donner de multiples témoignages de ces deux aspects problématiques : manque de fonctionnalisation et vision trop thématique ; nous en donnerons un autre encore, issu de l'observation, en février 2006, d'une séance en classe de seconde sous la responsabilité d'un élève professeur.

3. Ces tâches font parties de l'organisation de l'étude. Elles permettront de constituer une partie de l'environnement technologico-théorique de l'OMR. Cela souligne l'intérêt de mener d'emblée le travail d'analyse sur l'OM dans son ensemble.

À la suite de l'examen du programme par l'ensemble des professeurs de seconde de ce lycée, le secteur des fonctions a été découpé en thèmes associés à des sujet d'étude dont trois ont déjà été étudiés : *les équations* (équations « produits et quotients », mise en équation de problèmes), *généralités sur les fonctions* (notion de « être fonction de… », variable et ensemble de définition, image d'un élément par une fonction, lectures graphiques, fonctions croissantes et décroissantes, maximum et minimum sur un intervalle), *inéquations* (étude de signes d'expressions algébriques) ; un quatrième thème est en cours d'étude : *fonctions de références* (fonctions carrée et inverse).

La définition, le sens de variation et la représentation graphique de la fonction qui à x associe x^2 ont été établis précédemment et il s'agit d'étudier la situation suivante :

On considère ABCD un rectangle tel que AB = 5 et BC = 3. On place les points M, N, P et Q respectivement sur les segments [AB], [BC], [CD] et [DA] de telle sorte que les longueurs AM, BN, CP et DQ soient égales. Il s'agit de déterminer la position du point M sur le segment AB telle que l'aire du parallélogramme MNPQ inscrit dans le rectangle ABCD soit minimum.

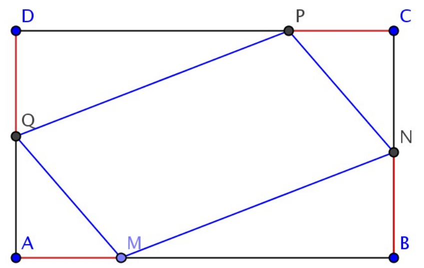


Figure 1

Le travail de la veille a permis d'obtenir que l'aire de MNPQ est donnée par $\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 8x + 15$ où x représente la longueur AM. La séance comporte alors trois grandes étapes

1. On met en évidence qu'il s'agit de déterminer le minimum de la fonction $\mathcal{A}$ sur [0 ; 3]
2. Une étude expérimentale à l'aide de calculatrices graphiques met en évidence que $\mathcal{A}$ atteint un minimum en 2 qui vaut 7.
3. On prouve analytiquement l'assertion précédente :

   a) en résolvant l'inéquation $\mathcal{A}(x) \geq 7$, qui se ramène à la résolution de l'équation $\mathcal{A}(x) - 7 \geq 0$;

   b) En résolvant l'équation $\mathcal{A}(x) = 7$. [Cette dernière question a été abordée en classe et laissée à faire pour la séance suivante.]

La résolution de l'inéquation $\mathcal{A}(x) \geq 7$ s'effectue de la façon suivante :

$\mathcal{A}(x) - 7 = 2x^2 - 8x + 8 = 2(x^2 - 4x + 4) = 2(x^2 - 2\times2\times x + 2^2) = 2(x - 2)^2$; cette quantité étant toujours positive, on obtient finalement que pour tout $x \in [0 ; 3]$ $\mathcal{A}(x) - 7 \geq 0$ ce qui équivaut à pour tout $x \in [0 ; 3]$ $\mathcal{A}(x) \geq 7$.

En dehors du fait que la technique mise en œuvre dans la classe pour résoudre une inéquation est purement algébrique, la séance soulève une autre question. Les élèves ont déjà étudié le type de tâches « déterminer le minimum d'une fonction » lors de l'étude du thème « généralités sur les fonctions » et la technique qui a été donnée à cette occasion repose sur une lecture graphique de la courbe. Cette première technique peut être justifiée par la définition de la croissance et de la décroissance d'une fonction : en effet, la fonction étant décroissante sur l'intervalle [0 ; 2] on a $\mathcal{A}(x) \geq \mathcal{A}(2)$ pour tout x appartenant à cet intervalle ; de même la fonction étant croissante sur l'intervalle [2 ; 3], $\mathcal{A}(x) \geq \mathcal{A}(2)$ pour tout x appartenant à cet intervalle et finalement, sur l'intervalle [0 ; 3], on obtient $\mathcal{A}(x) \geq \mathcal{A}(2)$ soit, puisque $\mathcal{A}(2) = 7$, $\mathcal{A}(x) \geq 7$. Ce qu'il resterait à justifier analytiquement, ce sont les variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle, nous y reviendrons. Le professeur fait donc émerger dans la séance une autre technique relative au même type de tâches, qui s'appuie sur cette première technique dans la partie expérimentale tout en s'en éloignant d'un point de vue technologique puisqu'elle repose sur un travail algébrique.

La motivation de l'apport de la nouvelle technique n'est pas véritablement abordée dans la séance, mais elle apparaît implicitement comme étant mieux justifiée parce qu'elle donnerait la « valeur exacte » du minimum. Pourtant, cette valeur exacte du minimum et de la valeur en laquelle il est atteint a été conjecturée graphiquement, à partir de la représentation graphique de la fonction, ce qui limite de fait la portée de la technique algébrique[4].

On peut voir là un effet du changement de programme que nous avons commenté plus haut, la tradition d'un travail algébrique autonome gênant son insertion dans le secteur fonctionnel. Pour résoudre les difficultés que nous venons d'évoquer, il faudrait disposer d'une technique de détermination de l'extrémum dont la justification repose sur la théorie des fonctions. Voyons cela.

Si l'on sort un moment des contraintes du programme de seconde, une technique classique pour produire la valeur de l'extrémum d'une fonction du second degré, une consiste à mettre l'expression sous « forme canonique » de la façon suivante : $2x^2 - 8x + 15 = 2(x^2 - 4x) + 15 = 2[(x - 2)^2 - 8] + 15 = 2(x - 2)^2 + 7$. Cette expression met alors en évidence le minimum de la fonction, 7, et la valeur en laquelle il est atteint, 2 – la valeur qui annule le terme variable. Cette expression de la fonction permet également de justifier analytiquement les variations de la fonction : la fonction carré étant croissante sur $\mathbb{R}+$ et décroissante sur $\mathbb{R}-$, la fonction qui à x associe $(x - 2)^2$ est croissante sur $[2 ; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty ; 2]$, et il en est donc de même pour la fonction qui à x associe $2(x - 2)^2$ puis pour la fonction qui à x associe $2(x - 2)^2 + 7$, soit la fonction $\mathcal{A}$.

On le voit, on rejoint là un thème du programme, « fonctions et formules algébriques », à travers les types de tâches « Identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ quand f est donnée par une formule », « Reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée…) » et « Modifier une expression, la développer, la réduire selon l'objectif poursuivi ». Ce thème permet alors d'unifier les deux techniques précédentes pour déterminer les extrémums d'une fonction sur un intervalle de la façon suivante :

– tracer la courbe de la fonction sur cet intervalle à la calculatrice et établir à partir de cette courbe le tableau de variation de la fonction ;

– justifier les variations de la fonction à partir des variations des fonctions de références, en mettant si nécessaire l'expression algébrique de la fonction sous une forme adaptée ;

en particulier, dans le cas d'une fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$, mettre l'expression sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$; dans le cas d'une fonction $x \mapsto$, mettre l'expression sous la forme $\alpha +$;

– donner alors les inégalités à justifier et utiliser la définition de la croissance et de la décroissance d'une fonction pour les justifier.

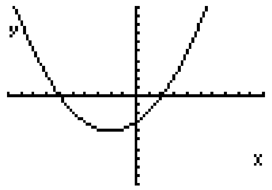
4 On ajoutera en outre que la technique algébrique qui vit actuellement le plus souvent dans les classes de seconde permet généralement de produire la valeur du minimum mais en donnant la forme canonique de la fonction du second degré.

Il reste encore à régler le problème de la mise en place d'une technique permettant de mettre les expressions du second degré sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$. On donnera ci-dessous les éléments d'une telle technique en la mettant en œuvre sur deux spécimens, sans aborder ici la question de sa mise en place.

$h : x \mapsto \left(\frac{1}{4}\right)x^2 + x - 3$.

Partie expérimentale

Représentation graphique de la fonction




```
WINDOW FORMAT
Xmin=-10
Xmax=10
Xscl=1
Ymin=-10
Ymax=10
Yscl=1
```

Tables de valeurs

X	Y1
-5	-1.75
-4	-3
-3	-3.75
-2	-4
-1	-3.75
0	-3
1	-1.75

X=-5

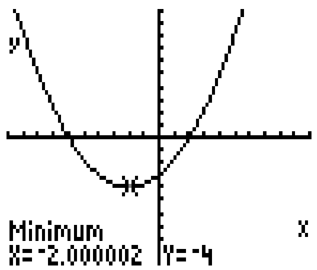
X	Y1
-5	-1.75
-4	-3
-3	-3.75
-2	-4
-1	-3.75
0	-3
1	-1.75

Y1=-3.75

X	Y1
-2.3	-3.978
-2.2	-3.99
-2.1	-3.998
-2	-4
-1.9	-3.998
-1.8	-3.99
-1.7	-3.978

Y1=-4

Détermination graphique du minimum



La fonction est décroissante sur $]-\infty\ ;-2]$ et croissante sur $[-2 : +\infty\ [$. Elle admet un minimum en -2 qui vaut -4.

Elle se met sous la forme $\left(\frac{1}{4}\right)(x+2)^2-4$, ce que l'on vérifie :

```
Y1=(1/4)*X^2+X-3
Y2=(1/4)*(X+2)^2
-4
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
```

X	Y1	Y2
-3	-3.75	-3.75
-2.5	-3.938	-3.938
-2	-4	-4
-1.5	-3.938	-3.938
-1	-3.75	-3.75
-.5	-3.438	-3.438
0	-3	-3

X=-3

Preuves :

1. On a $\boxed{\quad\quad}$ $= x^2 + 4 + 4x$. Donc $\frac{1}{4}$ $\boxed{\quad\quad}$ $= \frac{1}{4}x^2 + x + 1$ et finalement $\frac{1}{4}$ $\boxed{\quad\quad}$ $-$

$4 = \dfrac{1}{4}\ x^2 + x - 3$

2. On considère $a \leqslant b \leqslant -$٢. On a alors $a+2 \leqslant b+2 \leqslant 0$. Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty\,;0]$, on obtient que [ ] et donc $\left(\dfrac{1}{4}\right)(a+2)^2 \geqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)(b+2)^2 \geqslant 0$, soit finalement $\left(\dfrac{1}{4}\right)(a+2)^2 - 4 \geqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)(b+2)^2 - 4 \geqslant -4$. La fonction est ainsi décroissante sur $]-\infty\,;-2]$et sur cet intervalle on a $h(x) \geqslant 4$.

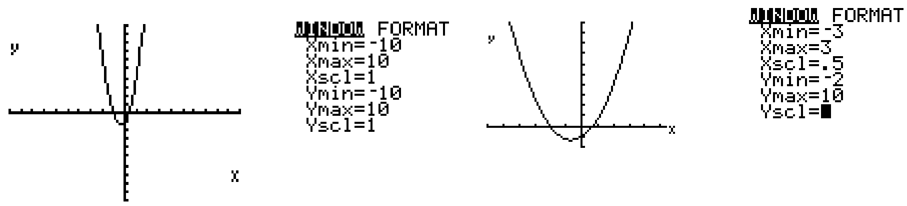
3. On considère $a \geqslant b \geqslant -2$. On a alors $a+2 \geqslant b+2 \geqslant 0$. Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$, on obtient que [ ] et donc $\left(\dfrac{1}{4}\right)(a+2)^2 \geqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)(b+2)^2 \geqslant 0$, soit finalement $\left(\dfrac{1}{4}\right)(a+2)^2 - 4 \geqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)(b+2)^2 - 4 \geqslant -4$. La fonction est ainsi croissante sur $[-2\,;+\infty[$ et sur cet intervalle on a $h(x) \geqslant 4$.

4. On a ainsi $h(x) \geqslant -4$ pour tout x, et -4 est le minimum de h. $h(-2) = -4$, et il est donc atteint pour $x = -2$.

g : $x \mapsto 3x^2 + 2x - 1$;

Partie expérimentale

Représentation graphique :



Tables numériques

Pas de 1

X	Y1
-10	279
-9	224
-8	175
-7	132
-6	95
-5	64
-4	39

X=-10

X	Y1
-3	20
-2	7
-1	0
0	-1
1	4
2	15
3	32

X=3

X	Y1
4	55
5	84
6	119
7	160
8	207
9	260
10	319

X=10

On voit que l'extrémum est atteint entre -1 et 1 ; pas de 0,1 à partir de -1 :

X	Y1
-1	0
-.9	-.37
-.8	-.68
-.7	-.93
-.6	-1.12
-.5	-1.25
-.4	-1.32

X= -1

X	Y1
-.4	-1.32
-.3	-1.33
-.2	-1.28
-.1	-1.17
0	-1
.1	-.77
.2	-.48

X=.2

L'extrémum est atteint entre -0,4 et -0,2 ; pas de 0,01 :

X	Y1
-.4	-1.32
-.39	-1.324
-.38	-1.327
-.37	-1.329
-.36	-1.331
-.35	[illegible]
-.34	-1.333

Y1=-1.3325

X	Y1
-.4	-1.32
-.39	-1.324
-.38	-1.327
-.37	-1.329
-.36	-1.331
-.35	-1.333
-.34	[illegible]

Y1=-1.3332

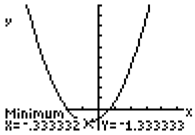
X	Y1
-.39	-1.324
-.38	-1.327
-.37	-1.329
-.36	-1.331
-.35	-1.333
-.34	-1.333
-.33	[illegible]

Y1=-1.3333

X	Y1
-.38	-1.327
-.37	-1.329
-.36	-1.331
-.35	-1.333
-.34	-1.333
-.33	-1.333
-.32	[illegible]

Y1=-1.3328

Détermination graphique du minimum (calc – minimum)



La fonction est décroissante de $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{3}\right]$ et croissante sur $\left[-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$; elle admet un minimum en $-\dfrac{1}{3}$ qui vaut $-1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$.

Elle se met sous la forme $3(x + 1/3)^2 -4/3$, ce que l'on vérifie :

```
Y1=3*(X+1/3)^2-4
/3
Y2=3*X^2+2*X-1
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
Y7=
```

X	Y1	Y2
-3	20	20
-2.5	12.75	12.75
-2	7	7
-1.5	2.75	2.75
-1	1E-13	0
-.5	-1.25	-1.25
0	-1	-1

X= -3

On notera que la table fournit une valeur approchée de Y1 en -1.

Preuves :

1. $3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{4}{3} = 3\left(x^2+\dfrac{2}{3\,x}+\dfrac{1}{9}\right) = 3x^2 + 2x -1.$

2. On considère $a \leq b \leq -1/3$. On a alors $a + 1/3 \leq b + 1/3 \leq 0$. La fonction $x \mapsto x^2$ étant décroissante sur $]-\infty\,;0]$, on obtient que $(a + 1/3)^2 \geq (b + 1/3)^2 \geq 0$, soit que $3(a + 1/3)^2 \geq 3(b + 1/3)^2 \geq 0$, et finalement que $3(a + 1/3)^2 - 4/3 \geq 3(b + 1/3)^2 - 4/3 \geq -4/3$, ce qui prouve que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{3}\right]$ et que sur cet intervalle $g(x) \geq -4/3$.

3. On considère $a \geq b \geq -1/3$. On a alors $a + 1/3 \geq b + 1/3 \geq 0$. La fonction $x \mapsto x^2$ étant croissante sur $[0\,;+\infty[$, on obtient que $(a + 1/3)^2 \geq (b + 1/3)^2 \geq 0$, soit que $3(a + 1/3)^2 \geq 3(b + 1/3)^2 \geq 0$, et finalement que $3(a + 1/3)^2 - 4/3 \geq 3(b + 1/3)^2 - 4/3 \geq -4/3$, ce qui prouve que la fonction g est croissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$ et que sur cet intervalle $g(x) \geq -4/3$.

4. On a donc $g(x) \geq -4/3$ sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que g admet un minimum qui vaut $-4/3$; il est atteint pour $x = -1/3$, puisque $g(-1/3) = -4/3$.

On obtient ainsi des techniques compatibles avec ce que demande le programme en liant de manière fonctionnelle le travail algébrique aux fonctions, qui préparent les élèves aux techniques qui seront étudiées dans les classes ultérieures du lycée et qui leur donnent la possibilité d'accomplir le type de tâches dans sa totalité, ou du moins d'avoir prise sur l'ensemble de la technique et de sa justification si l'on fait le choix d'une *technique coopérative*.

Ces techniques font également apparaître de manière lisible *une raison d'être de l'étude qualitative* de fonctions : on constitue pour l'essentiel la *base expérimentale* qui va permettre de faire surgir les premiers éléments de la théorie fonctionnelle, de la même manière que le travail à partir de figures permet de faire surgir des éléments de la théorie géométrique. La position relative des deux techniques, source de difficultés dans la séance en classe évoquée plus haut, trouve alors une solution semblable à celle adoptée en géométrie : on ne doute pas à l'issue de l'expérimentation graphique que le minimum de la fonction d’aire est 7, atteint en 2, de la même façon qu’une expérimentation graphique convainc qu’un triangle de côtés (3, 4, 5) est rectangle ; on a là deux faits, l’un numérique et l’autre géométrique, avérés. Il reste cependant, pour faire œuvre de mathématicien, à vérifier que l’on peut les déduire de la théorie fonctionnelle disponible (TFD) ou de la théorie géométrique disponible (TGD) : si cela n’était pas le cas, il faudrait travailler à augmenter la théorie des ingrédients pertinents (éventuellement lors d’une année d’étude ultérieure, comme cela sera le cas de quelques types de fonctions pour lesquelles on en restera, en seconde, à la conviction expérimentale).

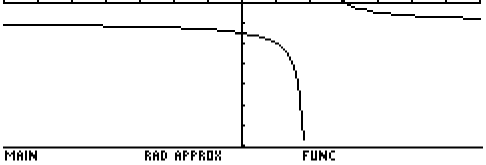
Scinder fortement l’étude qualitative des fonctions de celle des fonctions de référence comme le fait actuellement la norme de la profession constitue donc un obstacle pour faire entendre le travail d’élaboration théorique en cours de constitution, comme en témoigne par exemple la question suivante posée par un élève professeur :

Les élèves de la classe de 2de que j’ai en responsabilité ont énormément de mal à s’exprimer clairement. Surtout sur le thème des fonctions, ils mélangent les notions appartenant au domaine fonctionnel avec celles appartenant au domaine graphique. Je pense pourtant le répéter souvent et bien faire la distinction. Que pourrais-je faire ? (20, 2de, 2007-2008)

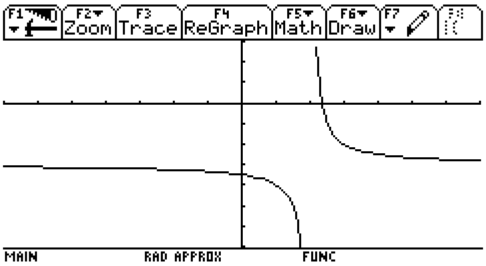
Les techniques envisagées font en outre apparaître que les tâches T51 et T52, rencontrées précédemment dans l’OMR découpée par l’élève professeur, ont une fonction technologique puisqu'elles permettent de justifier et/ou de produire une technique de détermination des variations respectivement des fonctions polynômes du second degré et des fonctions homographiques par un « enchaînement de fonctions ».
Cette « fonctionnalisation » de l’enchaînement de fonctions et du sens de variation des « fonctions de référence » n’est pas anecdotique. C’est cela qui, on l’a vu, permet de fabriquer des techniques relatives aux types de tâches algébriques dont la justification repose sur la théorie des fonctions. On en donnera encore deux exemples.

Soit par exemple à résoudre l’équation $\frac{3x+2}{x-4}=5$; la mise en évidence de la forme $3+\frac{14}{x-4}$ et de l’enchaînement de fonctions qu’elle matérialise permet de produire une technique efficace, qui sera notamment utile pour minimiser les erreurs de calcul ou encore calculer « de tête » :
$x \rightarrow X=x-4 \rightarrow Y=\frac{١٤}{X} \rightarrow Z=٣+Y$; donc $\frac{3x+2}{x-4}=5$ équivaut à $Z=5$, soit encore à $Y=Z-3=2$, puis à $X=\frac{14}{Y}=7$, soit encore à $x=X+4=11$.

Soit maintenant à résoudre l’inéquation $\frac{x-3}{2-x} \leq 2$. On pose $h(x)=\frac{x-٣}{٢-x}-2$ et $g(x)=\frac{x-٣}{٢-x}$ et il s’agit donc de résoudre $h(x) \leq 0$.



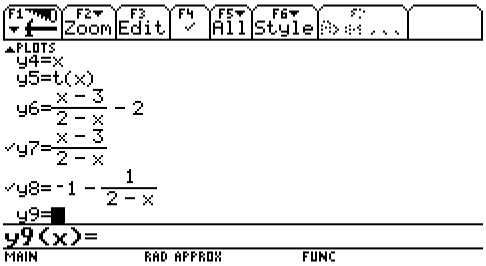
Représentation graphique de g (pas de 1).

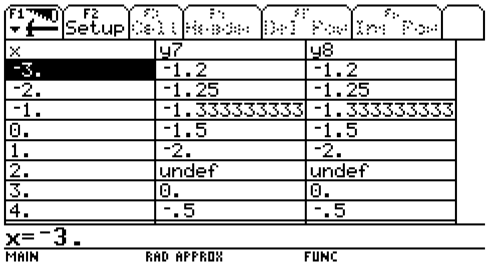


Représentation graphique de h (pas de 1).

On a donc $g(x) = -1 + \dfrac{k}{2-x}$; $g(1) = -2$ donc $k = -1$ et finalement $h(x) = -3 - \dfrac{1}{2-x}$

Vérification :





x	y7	y8
-3.	-1.2	-1.2
-2.	-1.25	-1.25
-1.	-1.333333333	-1.333333333
0.	-1.5	-1.5
1.	-2.	-2.
2.	undef	undef
3.	0.	0.
4.	-.5	-.5

Preuves : $-1 - \dfrac{1}{2-x} = \dfrac{[-(2-x)-1]}{2-x} = \dfrac{-3+x}{2-x}$; donc $h(x) = -1 - \dfrac{1}{2-x} - 2 = -3 - \dfrac{1}{2-x}$.

Quand x est inférieur à 2, $2 - x \geq 0$ et h est donc négative.

Quand $x > 2$, la fonction h est décroissante :

$$2 < x < x' \quad \Rightarrow 2 - x > 2 - x' > 0$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2-x} < \dfrac{1}{2-x'}$ puisque la fonction inverse est décroissante sur R-

$$\Rightarrow h(x) > h(x')$$

La résolution de l'équation donne alors que : $h(x) = 0$ équivaut à $\dfrac{١}{٢-x} = -٣$, soit encore à $٢ - x = -\dfrac{١}{٣}$ et $x = ٢ + \dfrac{١}{٣}$; la décroissance de h prouve alors que :$x > 2$ et $h(x) \leq 0$ équivaut à $x \geqslant \dfrac{٧}{٣}$.

On peut alors proposer une recomposition de l'organisation mathématique régionale à propos des fonctions, dont les types de tâches soient articulés à partir de deux raisons d'être, avec un environnement technologico-théorique composé pour l'essentiel de résultats de la théorie des fonctions : nous en donnerons ci-dessous une armature possible en termes de types de tâches, établie en organisant les types de tâches selon leur *apparition possible* comme *sous-types de tâches* des types de tâches coches proposés.

T : Optimiser une grandeur, g_1

- Exprimer une grandeur en fonction d'une autre grandeur attachée au système $g_1 = f(g_2)$
- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction f
- Déterminer les extrémums d'une fonction
  - Déterminer les variations d'une fonction f sur son ensemble de définition
    - Si f est donnée par sa courbe représentative, établir le tableau de variation

Si f est donnée par une formule,

Tracer la courbe représentative d'une fonction et établir son tableau de variation

Mettre l'expression d'une fonction sous une forme adaptée

Mettre en évidence un enchaînement de fonctions

Exprimer la croissance ou la décroissance d'une fonction par une inégalité

Déterminer la valeur d'une fonction en un point (bornes de l'ensemble de définition, extrémums notamment)

T': Étudier un phénomène

Déterminer une loi permettant de rendre compte d'un phénomène

Montrer qu'un phénomène est modélisable par une fonction affine

Montrer qu'un phénomène n'est pas modélisable par une fonction affine

Résoudre une équation du type $f(x) = g(x)$

Se ramener à la résolution de l'équation $f(x) - g(x) = 0$

Résoudre une équation du type $f(x) = 0$

Mettre l'expression d'une fonction sous une forme adaptée.

Mettre en évidence un enchaînement de fonctions

Résoudre une équation du type $f(x) < g(x)$

Se ramener à la résolution de l'équation $f(x) - g(x) < 0$

Résoudre une équation du type $f(x) < 0$

Résoudre une équation $f(x) = 0$

Déterminer les variations d'une fonction f

Exprimer la croissance ou la décroissance d'une fonction par une inégalité

La constitution d'une organisation mathématique de ce type suppose que l'on rompe avec la présentation du programme et que l'on pense le travail thématique fonctionnalisé par le ou les types de tâches coche(s) du secteur. Ce phénomène, que le secteur des fonctions en seconde met exemplairement en évidence, vaut sans doute pour les autres secteurs même si les ruptures avec les normes de la profession peuvent paraître moins vives.

Références

M. Artaud et M. Jullien. 2008.

Y. Chevallard. 200x.

MEN[5]. 1990.

MEN. 1999.

MEN. 2000.

5. Ministère de l'éducation nationale.