NORMAL (OR GAUSSIAN) DISTRIBUTION EXERCISES

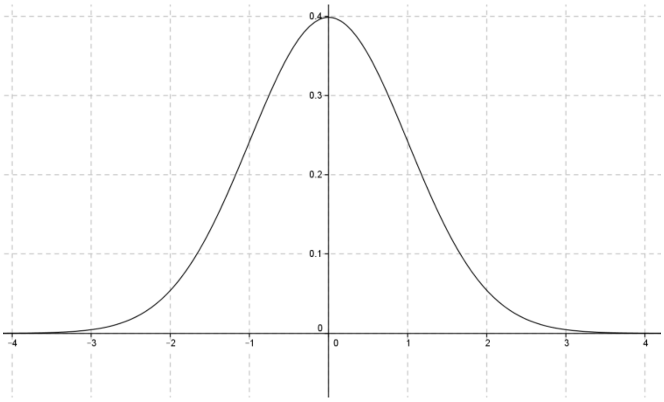
Exercise 1

A random variable follows a normal distribution $\mathcal{N}(0;1)$.

1. Calculate with your calculator $P(-0.5 \leq X \leq 0.5)$.
2. Deduce $P(X \geq 0.5)$.

Exercise 2 TRUE/FALSE

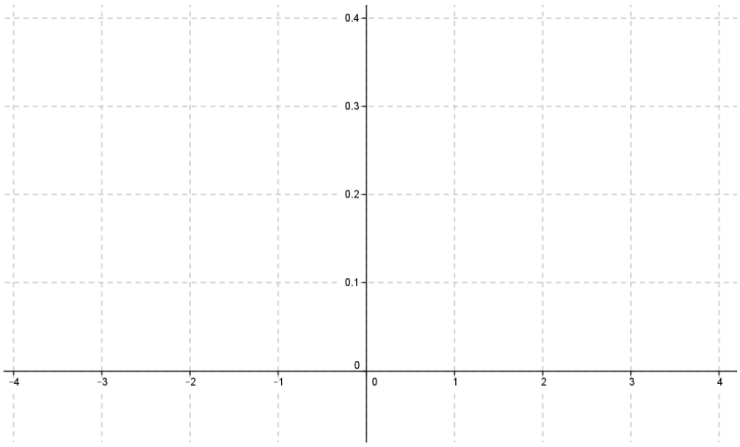
If a random variable follows a normal distribution $\mathcal{N}(0;1)$ then :



1. Its density function is $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$
2. The graph of the density function is symmetrical about the y-axis
3. The density function is defined only on [-3;3]
4. The values for $x \leq -3$ and $x \geq 3$ do not appear since they are smaller than 0.01 .

Exercise 3

1. Thanks to your calculator draw up opposite the graph of the density function of $\mathcal{N}(0;1)$.
2. Make appear $P(0 \leq X \leq 1)$ on your graph . Give an approximate value of this probability.
3. Deduce $P(-1 \leq X \leq 1)$.

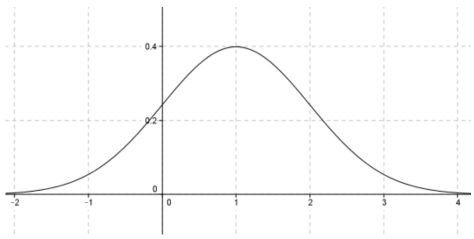


Exercise 4

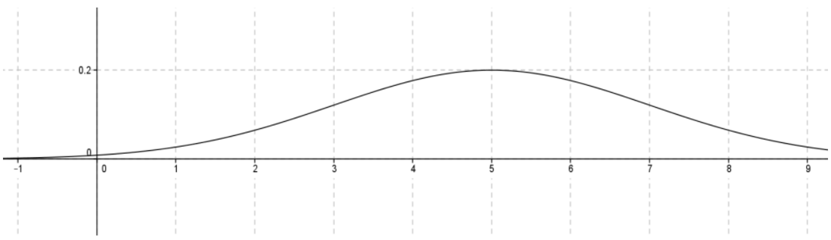
Associate each graph with its probability distribution.

a) $\mathcal{N}(-2;1)$ b) $\mathcal{N}(1;4)$ c) $\mathcal{N}(1;1)$ d) $\mathcal{N}(5;4)$

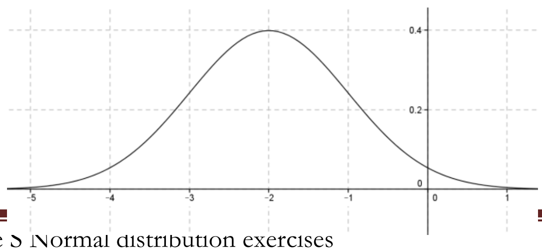
1.



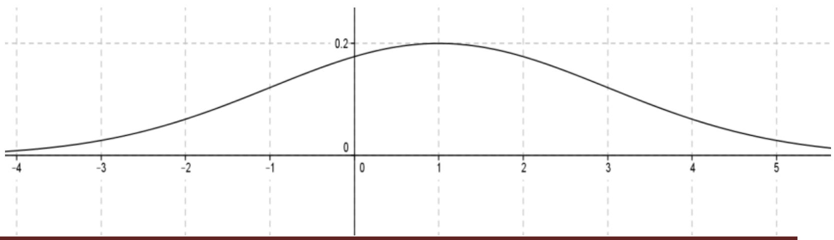
2.



3.



4.



Exercise 5

A machine is filling juice bottles. Because of variations in the various mechanisms, the weight of the bottle varies and follows a normal distribution with parameters $\mu = 1000$ g and $\sigma = 5$.
Calculate the probability for a bottle to weigh between 990 and 1010 g.

Exercise 6

A survey has showed that, yesterday evening, 78% of the pupils have watched Doctor H.
We interview successively and independently 25 pupils. Let X represents the random variable associated with the number of pupils having watched Doctor H yesterday.

1. True or False (Justify)

a. $X \sim \mathscr{B}(0.78;25)$ b. $P(X=18)=\binom{25}{18}\times 0.78^{18}\times 0.22^{7}$ c. $P(X=25)=0.78^{25}$

2. Thanks to the calculator, give :

a. $P(X=18)$ b. $P(X\le 20)$ c. $P(X>20)$ d. $P(18\le X\le 20)$

3. True or False (Justify)

a. $E(X)=\dfrac{25}{2}$ b. $E(X)=25\times 0.78$ c. $E(X)=25+0.78$ d. $V(X)=4.29$

Exercise 7

The life expectancy X (in hours) of an electric bulb follows $\mathscr{N}(\mu;\sigma^2)$. We know that $P(X\ge 10000)=0.6$ and $P(X\le 13000)=0.69$.

1. What is probability distribution of the variable $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$?
2. Prove that $P\left(Z\ge \dfrac{10000-\mu}{\sigma}\right)=0.6$ and $P\left(Z\le \dfrac{13000-\mu}{\sigma}\right)=0.69$
3. Justify that μ and σ are solutions of the simultaneous equations $\begin{cases}10000-\mu=-0.252\times\sigma\\ 13000-\mu=0.496\times\sigma\end{cases}$
4. Deduce the values of μ and σ (rounded to the unit).

Exercise 8

On average the width of an adult man's hand is 9.5 cm. It follows $\mathscr{N}(9.5;4)$. Results will be rounded to 1 mm. A door factory studies this distribution to set up his production.

1. What is the probability that one random man has a hand less than 8cm wide ?
2. What is the probability that one random man has a hand more than 12cm wide ?
3. The factory wants his production to fit at least 90% of the population.
   a. Which interval with amplitude 2a centered at 9.5 has a probability equal to 0.9?
   b. What must be the minimal length of the door handle ?

Exercise 9 **Height of women in France**

a	$P(X \le a)$
164	0,5362
165	0,5721
166	0,6075
167	0,6419
168	0,6753
169	0,7073
170	0,7377
171	0,7665
172	0,7934
173	0,8183
174	0,8413
175	0,8623
176	0,8814
177	0,8984
178	0,9137
179	0,9271
180	0,9389
181	0,9491
182	0,9579
183	0,9655
184	0,9719
185	0,9772
186	0,9817
187	0,9854
188	0,9885

1. A study, conducted on a sample containing as many women as men, has showed that 7% of women and 87% of men measure more than 1.75 m. We choose randomly a person in this sample.
   a. Calculate the probability that this person is a woman measuring more than 1.75m.
   b. Calculate the probability that this person measure more than 1.75m.
   c. We choose one person measuring more than 1.75m. What is the probability that it's a woman ?
2. We now assume that the random variable X equal to the height of French woman follows a Gaussian distribution with $\mu = 163$ cm and $\sigma = 11$. See table opposite.
   a. Calculate the probability that a French woman measure less than 1.75m.
   b. The minimum height for some jobs is 1.75cm. What is the probability a French woman is eligible for this kind of job ?
   c. Find the biggest number a such that : $P(X \le a) = 0.70$.
   d. Deduce the maximal height (to the cm) of 70% of French women.

Exercise 10

The 719 pupils in a high-school have been surveyed and asked the number of books they have read and films they have watched during the past year. Here is the result.

Nb of films	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	
Nb of students	5	10	10	20	35	40	60	80	85	
	9	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
	80	70	60	50	40	30	20	10	8	6

	Books		
	0 to 4	5 to 9	10 to 14
S	120	59	80
ES	50	100	50
L	50	110	100

Part A

1. Among the surveyed pupils, that is the percentage (rounded to the unit) of those reading less than 4 books?
2. Among those reading more than 10 books that is the percentage being in L ?
3. Among the S pupils, that is the percentage of those reading more than 4 books ?

Part B

1. Calculate the average $\overline{x}$ and the standard deviation σ of the data set of the number of films watched.

2. a. Calculate the interval $[\overline{x} - \sigma; \overline{x} + \sigma]$ and then $[\overline{x} - 2\sigma; \overline{x} + 2\sigma]$.

   b. For each of these intervals, calculate the percentage of the highschool's pupils whose number of films watched belongs to the interval.

Part C

We now assume that the random variable X equal to the number of films watched follows a Gaussian distribution and the previous results lead us to take $\mu = 9$. The parameter σ is yet unknown.

1. We know thet the probability that a pupil has watched more than 8 films is 0.362.
   a. Translate the previous sentence in terms of probabilities.
   b. What is probability distribution of the variable $Z = \dfrac{X-9}{\sigma}$?
   c. Prove that $P(X \le 8) = P\left(Z \le -\dfrac{1}{\sigma}\right)$.
   d. The calculator gives $P(Z \le -0.353) \approx 0.362$. Deduce the value of σ (rounded to the unit)
2. Calculate the probability that a random pupil has watched at least one film every month.

Exercise 11

In an insurance company, one has spotted that, out of 1200 customers, 60 have submit at least one claim over the past year. In the following, these files will be denoted SD.
We choose randomly and without replacement n files among the files of the 1200 customers. X is the random variable equal to the number of DS files.
All the calculated probabilities will be rounded to 0.01 .

1. What is the probability distribution of X ? Give its parameters.
2. Is this question $n = 10$. Calculate the probabilities of getting :
   a. Only one DS file.
   b. At least one DS file.
3. Is this question $n = 200$. We assume that the probability distribution of X can be approximated by a normal distribution. We denote Z this random variable.
   a. Give the parameters of Z.
   b. Calculate $P(Z \le 9)$ and then $P(Z \ge 15)$.
   c. Calculating an approximate value of $P(X = k)$ comes down to calculate $P(k - 0.5 \le Z \le k + 0.5)$ (we call it the continuity correction). Deduce approximate value of $P(X = k)$.

QUELQUES AUTRES EXERCICES CORRIGÉS

5. *Réglage d'une machine d'embouteillage dans une coopérative*

Sur une chaîne d'embouteillage dans une brasserie, la quantité X (en cL) de liquide fournie par la machine pour remplir chaque bouteille de contenance 110 cL peut être modélisée par une variable aléatoire de loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 2$.

La législation impose qu'il y ait moins de 0,1% de bouteilles contenant moins d'un litre.

À quelle valeur de la moyenne μ doit-on régler la machine pour respecter cette législation?

Solution

Il s'agit déterminer la valeur de μ telle que $P(X < 100) < 0{,}001$. On détermine d'abord la valeur z (on dit aussi quantile) de la loi normale centrée réduite, telle que $P(Z < z) = 0{,}001$. On trouve (logiciels ou calculettes) $z \approx -3{,}09$. Comme $Z = (X - \mu) / 2$, il ne reste plus, pour trouver μ, qu'à résoudre $-3{,}09 = (100 - \mu) / 2$. On trouve $\mu \approx 106{,}18$.

R qnorm(p) est la fonction qui permet de trouver t tel que P(T<t)≈p, T étant de loi normale (c'est la répartition normale réciproque pré programmée) qnorm(.001) [1] -3.090232	TEXAS(83Plus) et + FracNormale() est la fonction qui permet de trouver t tel que P(T<t)≈p, T étant de loi normale (c'est la répartition normale réciproque pré programmée) FracNormale(.001,0,1) -3.0902323	CASIO(35+) et + InvN est le menu qui permet de trouver t tel que P(T<t)≈p T étant de loi normale (c'est la répartition normale réciproque pré programmée) menu stat ► dist ► NORM ► InvN ► Area :.001 σ : 1 ; μ : 0. Inverse Normal x = -3.0902

2° La contenance des bouteilles étant de 110 cL, quelle est alors la probabilité qu'une bouteille déborde lors du remplissage?

Solution : Avec $\mu \approx 106{,}18$, on obtient $P(X > 110) \approx 0{,}028$.

4° Le directeur de la coopérative veut qu'il y ait moins de 1% de bouteilles qui débordent au risque de ne plus suivre la législation.

a) Quelle est alors la valeur de μ?

Solution

Il s'agit cette fois de déterminer μ tel que $P(X > 110) < 0{,}01$. On trouve $\mu \approx 105{,}34$.

b) Quelle est dans les conditions de la question a) la probabilité que la bouteille contienne moins d'un litre?

Solution

Avec cette valeur de μ , on obtient $P(X < 100) \approx 0{,}0038$, ce qui est plus élevé que dans le cas précédent.

c) Déterminer μ et σ afin qu'il y ait moins de 0,1% de bouteilles de moins d'un litre ET moins de 1% de bouteilles qui débordent.

Solution

On cherche donc à déterminer les valeurs de μ et de σ de sorte que :

$$P(X < 100) < 0{,}001 \quad \text{et} \quad P(X > 110) < 0{,}01.$$

Les deux contraintes sur les probabilités fournissent les deux conditions suivantes.

On détermine d'abord la valeur z_{sup} de la loi normale centrée réduite telle que $P(Z > z_{sup}) = 0{,}01$. On trouve (logiciels ou calculettes) $z_{sup} \approx 2{,}33$.

On détermine ensuite la valeur z_{inf} telle que $P(Z < z_{inf}) = 0{,}001$. On trouve $z_{inf} \approx -3{,}09$.

Les deux contraintes se traduisent donc par les deux inégalités suivantes :

$$\frac{110-\mu}{\sigma} \geq 2{,}33 \quad \text{et} \quad \frac{100-\mu}{\sigma} \leq -3{,}09 \ .$$

On obtient donc un domaine de solutions et une discussion pourra être menée quant aux choix pertinents que le directeur de coopérative pourrait faire.

6. *Durée de vie d'un appareil*

La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne et d'écart-type inconnus. Les spécifications impliquent que 80 % de la production des appareils ait une durée de vie entre 120 et 200 jours et que 5% de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

1. Quelles sont les valeurs de μ et σ^2 ?

2. Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 jours et 230 jours ?

Solution

1. On note X la variable durée de vie. Les spécifications se traduisent par :

$P(120 \leq X \leq 200) = 0{,}8$ et $P(X < 120) = 0{,}05$.

En notant toujours $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ la variable centrée réduite, on obtient :

$$P\left(\frac{120-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{200-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}8 \quad \text{et} \quad P\left(Z < \frac{120-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}05$$

En utilisant logiciel ou calculatrice, on obtient : $\mu = 120 + 1{,}65\ \sigma$ et $\mu = 200 - 1{,}04\ \sigma$.

La résolution du système donne : $\mu \approx 169$ et $\sigma^2 \approx 884$.

2. $P(200 \leq X \leq 230) = P(X \leq 230) - P(X \leq 200) \approx 0{,}13$

4. *Masse d'alerte pour cartes de contrôle*

Une coopérative produit du beurre en microplaquettes de 12,5g pour des collectivités et des chaînes hôtelières. Les microplaquettes sont conditionnées dans des boîtes de 40.

La masse des microplaquettes peut être modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance $\mu = 12{,}5$ et de variance $\sigma^2 = 0{,}2^2$ et on admet que la variable aléatoire X égale à la masse d'une boîte de 40 microplaquettes suit alors une loi normale d'espérance $\mu = 500$ et de variance $\sigma^2 = 1{,}6$ (les notions relatives à la variance d'une somme de variables ne sont pas au programme, quelques notions sont abordées en annexe 2).

La boîte est jugée conforme si sa masse est comprise entre 496,2 g et 503,8 g (soit environ $500 \pm 3\sigma$).

1. Calculer la probabilité qu'une boîte prélevée aléatoirement en fin de chaîne de conditionnement soit non conforme. (*Réponse : 0,003 à 10^{-3} près*)
2. Pour contrôler le réglage de la machine, on détermine des poids d'alerte $\mu - h$ et $\mu + h$ tels que $P(\mu - h < X < \mu + h) = 0{,}99$. Ces poids d'alerte sont inscrits sur une carte de contrôle et correspondent à une marge de sécurité en lien avec des normes de conformité.

   Calculer les poids d'alerte.

   Solution

   Notons $Z = \dfrac{X-500}{\sqrt{1{,}6}}$. Z suit une loi normale centrée réduite donc nous savons que $P(-2{,}58 < Z < 2{,}58) \approx 0{,}99$. Il ne reste plus, pour trouver $\mu - h$ et $\mu + h$, qu'à résoudre $\dfrac{\mu+h-500}{\sqrt{1{,}6}} = 2{,}58$ et $\dfrac{\mu-h-500}{\sqrt{1{,}6}} = -2{,}58$ ce qui donne $\mu + h \approx 503{,}3$ et $\mu - h \approx 496{,}7$.

Grâce à des échantillons prélevés en sortie de chaine ces masses d'alerte permettent de déceler des anomalies en temps réel.