Zône de baignade

Groupe mutualisation d'Aix-Marseille
Camille ROMAN-FAURE Christophe PICHOT Sébastien VELON
Sur une idée de l'Académie de Nantes

8 avril 2015

Table des matières

1 Niveaux

Cette activité s'adresse aux élèves de cinquième, quatrième, troisième et éventuellement seconde.

2 Pré-recquis

- Notion d'aires et de périmètres , en particulier rectangle et disque.

- Notion d'utilisation d'un tableur.
- Pour le prolongement, pour les élèves de troisième, notion de fonction.

3 Dispositifs

- Séance 1 : Travail en îlots de 4 en classe.
- Séance 2 : Travail en binôme en salle informatique.
- Séance 3 : Mutualisation et prolongement.

4 Description et objectifs des séances

- Séance 1 : Enoncé de base distribué ou projeté.
  - ☞ Appropriation du problème.
  - ☞ Modélisation graphique.
  - ☞ Résolution par Essai-Erreur-Ajustement.
- Séance 2 : Amener les élèves à utiliser un tableur.
  - ☞ Question de la validité et de l'unicité de la solution.
- Séance 3 : Prolongement en fonction du niveau de la classe.
  - ☛ Cinquième et Quatrième : Ouvrir le problème à d'autres formes de surfaces comme le disque par exemple.
  - ☛ Troisième : Écriture littérale de la fonction « Aires », puis calcul d'images, représentation graphique et lectures graphiques.

5 Compétences travaillées

- Séance 1 :
  - ☞ Mise en œuvre de la démarche d'investigation
  - ☞ pour résoudre un problème.
  - ☞ Développement de l'autonomie et de l'initiative de l'élève dans cette démarche.
  - ☞ Création et utilisation d'un programme de calcul.
  - ☞ Exploitation des données.

- Séance 2 :
  - ☞ S'approprier un environnement informatique de travail.
  - ☞ Créer, modifier une feuille de calcul et insérer une formule.
  - ☞ Réaliser un graphique.
- Séance 3 : En fonction du niveau de classe.

6 Énoncé de base

Un maître nageur utilise une corde de 128 m de long attaché sur le sable par deux piquets. Il place ensuite deux bouées en pleine eau pour délimiter une zone de baignade rectangulaire. Il se demande où placer ses piquets et ses bouées pour obtenir une zone de baignade ayant la plus grande aire.

7 Prolongements-Énoncés annexes

7.1 Cinquième-Quatrième : D'autres surfaces ?

Amener les élèves à s'interroger sur d'autres formes surfaces (triangles ; disque) pouvant être construites avec la même ligne. Deux questions :

1 Est-ce possible ?

2 Cela amène-t-il une optimisation ?

7.2 Troisième : Travail à partir d'expressions littérales

1 Reprendre l'activité en notant x la « largeur » du rectangle.

2 Travailler les écritures littérales et les fonctions de la forme $f : x \to x(128-2x)$.

7.3 Seconde : Travail d'expressions littérales

Cette étude est à mener si les élèves n'ont pas encore étudié le second degré et n'ont donc pas à leur disposition le résultat suivant :

x_1 et x_2 étant les deux racines d'une équation du second degré, l'extremum est alors donné par $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

1 Aider les élèves à supposer que la valeur x_0 rendant l'aire maximale existe.

2 À partir de l'expression $f : x \to x(128-2x)$, leur poser la question suivante : « Que devient la fonction si on rallonge la "largeur" de 1 ? ». Autrement dit, calculer $f(x+1)$.

3 Puisque x_0 rend f maximale, on a donc $f(x_0) < f(x_0+1)$.

4 Faire de même avec $f(x_0-1)$.

5 Trouver alors un encadrement de x_0.

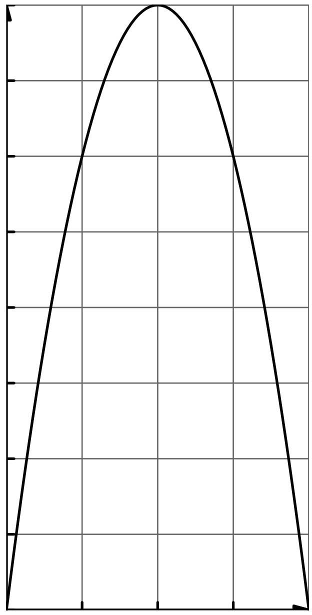
Voir la résolution en annexe.

8 Exemples de productions d'élèves de troisième au tableur

8.1 Tableur

	A	B	C
1	Longueur AB	Longueur BC	Surface de baignade
2	25	78	1950
3	26	76	1976
4	27	74	1998
5	28	72	2016
6	29	70	2030
7	30	68	2040
8	31	66	2046
9	32	64	2048
10	33	62	2046
11	34	60	2040

8.2 Graphique



9 Annexe

$$f(x_0) = x_0(128 - 2x_0) = -2x_0^2 + 128x_0$$

En résumé :

$$\boxed{f(x_0) = -2x_0^2 + 128x_0} \tag{1}$$

En rallongeant la largeur de 1, on obtient :

$$f(x_0 + 1) = (x_0 + 1)[128 - 2(x_0 + 1)] = -2x_0^2 + 124x_0 + 126$$

En résumé :

$$\boxed{f(x_0 + 1) = -2x_0^2 + 124x_0 + 126} \tag{2}$$

En diminuant la largeur de 1, on obtient :

$$f(x_0 - 1) = (x_0 - 1)[128 - 2(x_0 - 1)] = -2x_0^2 + 132x_0 - 130$$

En résumé :

$$\boxed{f(x_0 - 1) = -2x_0^2 + 132x_0 - 130} \tag{3}$$

x_0 étant la valeur maximisant f, on obtient les deux inéquations suivantes :

$-2x_0^2 + 124x_0 + 126 < -2x_0^2 + 128x_0$ $\Longleftrightarrow x_0 > 31{,}5$	$-2x_0^2 + 132x_0 - 130 < -2x_0^2 + 128x_0$ $\Longleftrightarrow x_0 < 32{,}5$

En conclusion : Un premier encadrement donne une « bonne » idée de la valeur de x_0.