BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2016

Jeudi 16 juin 2016

MATHÉMATIQUES

Série : SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LABORATOIRE

Spécialité : BIOTECHNOLOGIES

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 4

Calculatrice autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Le candidat doit traiter les quatre exercices. Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

La page 6/6 est à rendre avec la copie.

<u>Exercice 1 (6 points)</u>

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes. *On arrondira les résultats à 10^{-3}.*

Une laiterie produit des fromages, frais ou secs.

1. Pour être accepté, un fromage frais doit avoir une masse supérieure à 240 grammes. On appelle M la variable aléatoire qui à tout fromage frais, prélevé au hasard dans la production, associe sa masse en grammes. On suppose que M suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart type $\sigma = 5$.

   Quelle est la probabilité qu'un fromage frais prélevé au hasard dans la production soit refusé ?

2. On suppose que 2 % des fromages frais produits ont une masse insuffisante. On prélève un échantillon de 150 fromages frais, pris au hasard dans la production. On suppose que la production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui, à un échantillon de 150 fromages frais, pris au hasard dans la production, associe le nombre de fromages de masse insuffisante dans l'échantillon.
   a) Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.
   b) Quelle est la probabilité qu'il y ait dans le prélèvement au maximum cinq fromages de masse insuffisante ?
   c) Déterminer l'espérance de X et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. La laiterie estime que 18 % de ses consommateurs de fromages préfèrent les fromages secs.
   a) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence f des consommateurs de la laiterie préférant les fromages secs dans un échantillon de 400 personnes.
   b) La laiterie interroge au hasard un échantillon de 400 consommateurs sur leur préférence ; 55 d'entre eux déclarent préférer les fromages secs. La laiterie doit-elle alors considérer que la préférence de sa clientèle concernant les fromages secs a changé ? Pourquoi ?

4. Pour peser ses fromages, l'entreprise fait appel à un fabricant de balances électroniques. La variable aléatoire T qui, à chaque balance choisie au hasard dans la production de ce fabricant, associe la durée (exprimée en heures) pendant laquelle la balance est réglée correctement, suit la loi exponentielle de paramètre λ, λ étant un réel. Une balance produite chez ce fabricant reste, en moyenne, correctement réglée durant 90 heures.
   a) Déterminer la valeur exacte de λ.
   b) On extrait au hasard une balance de la production. Déterminer le réel t_0 tel que $P(T \geq t_0) = 0{,}93$. Comment interpréter ce résultat ?

Exercice 2 (5 points)

Une petite entreprise familiale veut stériliser une partie de sa production maraîchère sous forme de conserves, à l'aide d'un autoclave.

1. Soit f la fonction qui à tout temps t, exprimé en minutes, associe la température, exprimée en degrés Celsius, au cœur de la conserve placée dans l'autoclave. On admet que la fonction f ainsi définie est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}162y = 20{,}3$ sur [0,60].
   a) Résoudre l'équation différentielle (E).
   b) Au moment de la mise en route de l'autoclave (c'est-à-dire au temps $t = 0$), la température au cœur de la conserve est égale à 21° (température dans l'atelier de stérilisation). Déterminer une expression de $f(t)$ pour tout réel $t \geq 0$.

Dans la suite de l'exercice, la température, exprimée en degrés Celsius, au cœur de la conserve placée dans l'autoclave, en fonction du temps t, exprimé en minutes, est modélisée par la fonction g définie sur [0, 60] par $g(t) = 125 - 104\,\mathrm{e}^{-0{,}16t}$.

2.
   a) Calculer $g'(t)$ où g' est la fonction dérivée de g. Étudier le signe de g' sur [0,60].
   b) En déduire le tableau de variations de g.

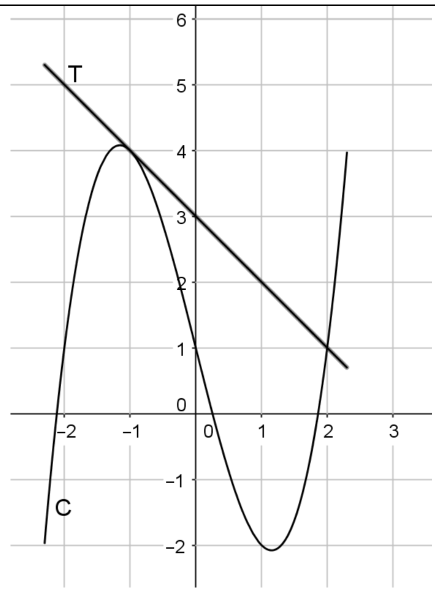
3. La courbe C_g, fournie en annexe, est la représentation graphique de la fonction g.
   a) Quelle est la température au bout de 9 minutes ? On donnera la valeur arrondie au degré.
   b) Pour que la stérilisation soit efficace, la conserve doit rester 3 minutes à plus de 120°. À l'aide de la courbe C_g, déterminer au bout de combien de temps après le lancement de la stérilisation, il sera possible d'arrêter l'autoclave car la stérilisation sera alors efficace. On laissera les traits de construction apparents et on rendra l'annexe avec la copie.
   c) Retrouver ce résultat en résolvant une inéquation.

Exercice 3 (4 points)

Les questions sont indépendantes entre elles.

1. La courbe C ci-contre est la représentation graphique d'une fonction *f* définie sur l'intervalle $[-4,4]$. La droite T est la tangente à la courbe C au point d'abscisse -1.

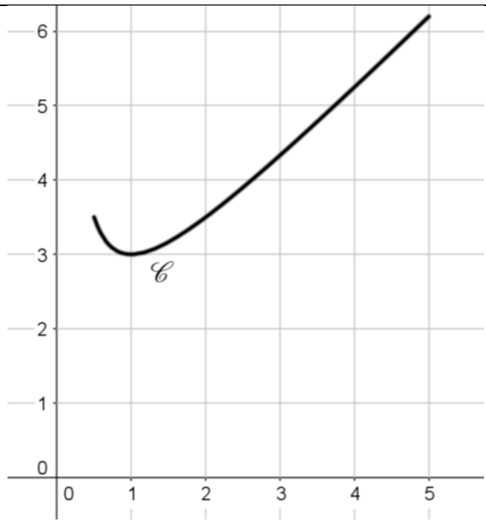
Question : par lecture graphique, donner les valeurs de $f(-1)$ et de $f'(-1)$ où f' est la fonction dérivée de *f*.



2. La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est la courbe représentative de la fonction *g* définie sur l'intervalle [0,5 ; 5] par :

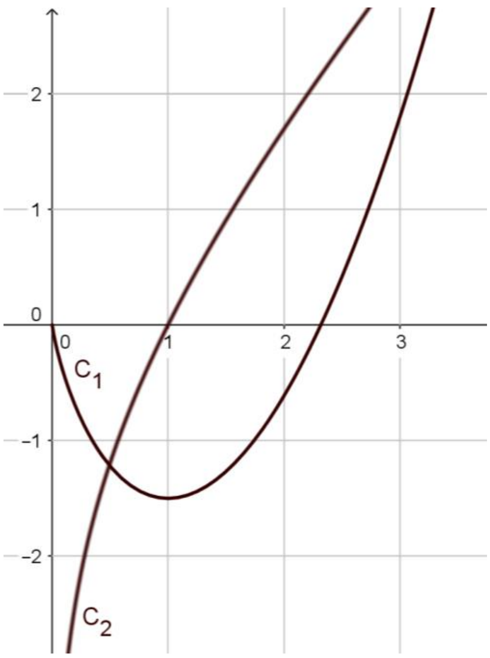
$g(x) = \dfrac{1}{x} + x + 1$.

Question : déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$.



3. Le graphique ci-contre donne deux courbes C_1 et C_2. Ces deux courbes sont représentatives de deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$: une fonction *h* et une de ses primitives *H*.

Question : indiquer, en justifiant votre réponse, laquelle des deux courbes (C_1 ou C_2) est la courbe représentative de la fonction *H*.



Exercice 4 (5 points)

À partir du 1[er] janvier 2014, Alice a décidé de travailler son endurance à la course à pied. Pour cela, elle va s'entraîner régulièrement. Tous les mois, elle note ses performances afin d'évaluer ses progrès.

1. Alice suit d'abord l'évolution des distances parcourues. Au mois de janvier 2014, la distance qu'elle est capable de courir en une fois est égale à 10 km et cette distance courue en une fois augmente tous les mois de 6 %. Pour tout entier naturel n, on appelle d_n la distance, en kilomètres, qu'Alice est capable de courir en une fois le n-ième mois après le mois de janvier 2014. Ainsi, on considère que $d_0 = 10$.

   a) Justifier que $d_1 = 10{,}6$.

   b) Quelle est la nature de la suite (d_n)? Exprimer, pour tout entier naturel n, d_n en fonction de n.

   c) Déterminer la distance qu'est capable de courir Alice en une fois au mois de septembre 2014. On donnera la valeur arrondie à 0,1 km.

   d) Au bout de combien de mois Alice sera-t-elle capable de courir en une fois 25 km ? Justifier.

2. À partir du mois de septembre 2015, Alice s'intéresse au temps mis pour courir les 10 premiers kilomètres de sa course à pied. Son temps pour les 10 premiers kilomètres, au mois de septembre 2015, est de 60 minutes. On admet que ce temps diminue tous les mois de 2 %, et cela jusqu'en décembre 2016. Alice utilise l'algorithme suivant :

```
Variables : N entier naturel, t réel
Initialisation :
    Affecter à N la valeur 0
    Affecter à t la valeur 60
Traitement :
    Tant que t > 50
        Affecter à N la valeur N +1
        Affecter à t la valeur 0,98×t.
    Fin Tant que
Sortie : Afficher N, Afficher t
```

   a) Que cherche à déterminer Alice avec cet algorithme ?

   b) Recopier et compléter le tableau suivant avec les valeurs successives prises par les variables N et t lors du déroulement de l'algorithme, jusqu'à son arrêt.

Valeur de N	0	1	…			
Valeur de t (arrondie à 10^{-2})	60	58,80	…			

   c) Quelles sont les valeurs affichées en sortie par l'algorithme ? Que peut en déduire Alice ?

   d) Alice a pour objectif de se qualifier pour un championnat de semi-marathon. L'épreuve de qualification est aussi un semi-marathon, d'une longueur de 21 km, qui se déroulera au mois de novembre 2016. Alice peut-elle espérer se qualifier sachant que cette épreuve se court à 82 % de la vitesse qu'elle peut avoir sur les 10 premiers kilomètres de course et que le temps pour se qualifier doit être inférieur à 2 heures ? On justifiera la réponse.

Exercice 2 : annexe

Représentation graphique de la fonction g