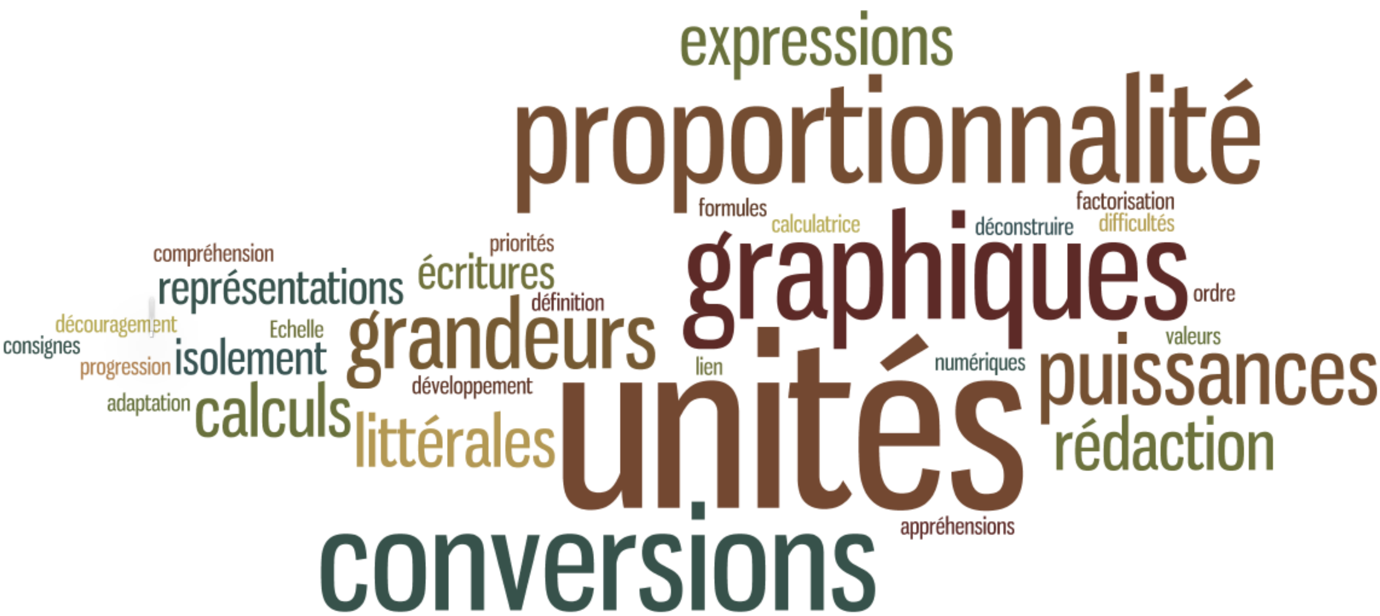
REGARDS CROISÉS
MATHS - PHYSIQUE & CHIMIE

LE GUIDE PRATIQUE

Proportionnalité
Calculs avec unités de grandeurs
Isolement de terme



Groupe Maths-Physique et Chimie de l'IREM de Paris,
Université Paris Diderot

PARIS IREM

Avec les contributions de

l'Inspection Pédagogique Régionale de physique-chimie
de l'académie de Créteil.

académie Créteil

Mars 2018

Les élèves rencontrent de plus en plus de difficultés en calculs,

mais des leviers existent pour analyser puis changer les choses.

L'intention première de ce *guide pratique* est d'inviter à porter un regard nouveau sur les pratiques des mathématiques dans la classe, en particulier lorsqu'elles font intervenir des grandeurs. Travailler sur le sens donné aux mathématiques pratiquées en classe permet de susciter curiosité, confiance, plaisir, autonomie et réussite chez les élèves.

Pour cela, ce guide fournit plusieurs clés d'analyse sur trois thématiques retenues comme majeures :

- les grandeurs et en particulier les unités, car bannies depuis plusieurs décennies des applications numériques pour des raisons historiques, les unités manquent aujourd'hui cruellement pour aider les élèves à donner du sens aux calculs ;

- la proportionnalité, car elle se résume souvent à l'astuce du produit en croix, ce qui empêche les élèves d'aborder la diversité, l'importance et la complexité du concept, mais aussi dans une certaine mesure, ce qu'il peut avoir d'intuitif sous certains aspects ;

- l'isolement de terme (ou résolution d'équation), car il donne lieu à de très nombreuses astuces parfois considérées comme des outils de différenciation pédagogique lorsqu'en réalité elles confinent les élèves dans leurs difficultés.

Ce document est une synthèse d'une partie d'un travail mené depuis plus de trois ans dans le cadre du groupe Maths-Physique et Chimie de l'IREM de Paris (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), par trois enseignants-formateurs : David BEYLOT et Bernard GALIN, tous deux enseignants de mathématiques et formateurs à l'ESPE de Créteil et Pascal SAUVAGE, enseignant de physique-chimie et formateur académique dans l'académie de Créteil. Ce fascicule propose des éclairages originaux sur les pratiques en classe, tout en veillant à rendre cohérentes les approches des mathématiques et de la physique-chimie.

Ce *guide pratique* a été réalisé en collaboration avec l'Inspection Pédagogique Régionale de physique-chimie, en vue d'une diffusion auprès de l'ensemble des enseignants de physique-chimie de l'académie de Créteil.

Des liens vers des approfondissements sont présents à la fin de ce fascicule.

Applications numériques avec unités de grandeurs

ou le droit d'écrire les unités dans les calculs

Depuis une cinquantaine d'années s'est imposée en France une tradition selon laquelle il serait inutile, encombrant, voire interdit d'écrire les unités de grandeurs dans les calculs. Cette pratique peut-elle être remise en question dans l'intérêt des élèves ?

Ce que préconise l'Institution

« Mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, *en conservant les unités*. »

Programmes 2016, Cycle 4 (Collège), Mathématiques, Grandeurs et Mesures.

Lors du Séminaire National de Formation *Croisements didactiques : mathématiques et physique-chimie au collège*, du 10 mars 2017 à Paris, les groupes mathématique et physique-chimie de l'Inspection Générale ont conjointement confirmé qu'il était mathématiquement légitime et pertinent pour la formation des élèves d'écrire les unités de grandeurs dans les calculs.

Cette pratique est donc possible,
en examen - BAC ou DNB - et en évaluation en classe.
Aussi, un élève ne peut pas être pénalisé de mettre les unités dans les calculs.

La signification du signe égal, au cœur de la démarche

Le signe égal signifie « la même chose que » (première approche)
***Donc* une grandeur n'est jamais égale à un nombre (non homogène).**

$v = \frac{d}{t} \cancel{=} \frac{240}{2} \cancel{=} 120\,\mathrm{km.h^{-1}}$ MAIS $v = \frac{d}{t} = \frac{240\,\mathrm{km}}{2\,\mathrm{h}} = 120\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 120\,\mathrm{km/h} = 120\,\mathrm{km.h^{-1}}$

La présence des unités dans les calculs facilite aussi les conversions :

$$v = 120\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{120\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{h}} = \frac{120 \times 1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = \frac{120\,\mathrm{m}}{3{,}6\,\mathrm{s}} = \frac{33{,}3\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = 33{,}3\,\mathrm{m/s}$$

Mettre les unités permet de préserver le sens grandeurs
par l'analyse dimensionnelle intégrée au calcul.
Cela facilite aussi les conversions et
permet aux élèves d'acquérir une méthodologie,
d'identifier et de comprendre leurs erreurs.

Proportionnalité

ou la multiplicité des éclairages possibles

La proportionnalité est un objet d'apprentissage riche, complexe et incontournable dans la formation des élèves. Pourtant bien souvent, elle est réduite en classe à l'astuce du produit en croix. Les propriétés additive et multiplicative de la linéarité ainsi que l'égalité des rapports (coefficient de proportionnalité comme quotient de deux grandeurs) sont le cœur de la proportionnalité. Elles se déclinent de manières extrêmement variées.

Le langage naturel : un appui pour la proportionnalité

« *Une voiture roule à 50 km/h* » ← **coefficient de proportionnalité**
« pour 1 h on a 50 km »
« pour 2 h on a 2 × 50 km = 100 km » ← **propriété multiplicative**
« pour 1 h + 2 h on a 50 km +100 km = 150 km » ← **propriété additive**

Passage par l'unité de grandeur et coefficient de proportionnalité

Une voiture roule à vitesse constante et parcourt 100 km en 3 h.
Quelle sera la distance parcourue en 5 h ?

pour 3 h on a 100 km
pour 1 h on a (100 km)/3 ← **détermination du coefficient de proportionnalité**
pour 5 h on a 5 × (100 km)/3 ≈ 167 km

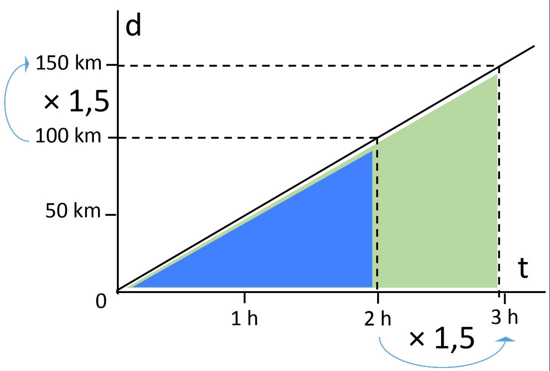
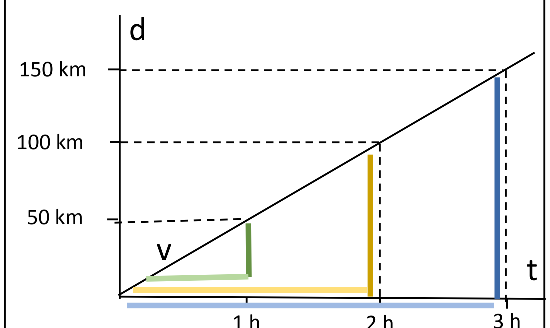
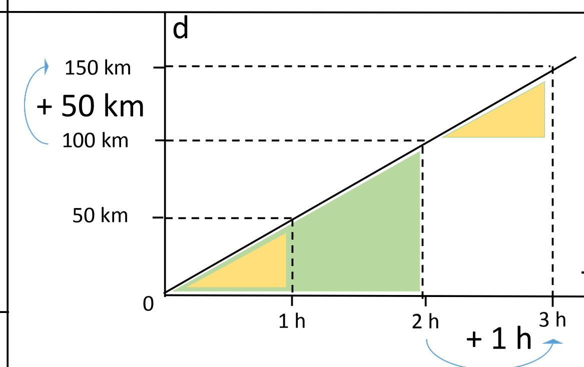
Le passage à l'unité revient à exploiter un coefficient de proportionnalité.

Proportionnalité et diversité des représentations

Les trois propriétés de la proportionnalité peuvent être abordées sous des éclairages extrêmement variés : le langage naturel mais aussi la géométrie, l'algèbre ou en encore les représentations graphique et tabulaire.

Mobiliser explicitement les trois propriétés de la proportionnalité, en variant et en reliant les représentations, peut aider les élèves. L'apprentissage de la proportionnalité s'envisage alors dans une logique progressive.

La proportionnalité : éclairages croisés

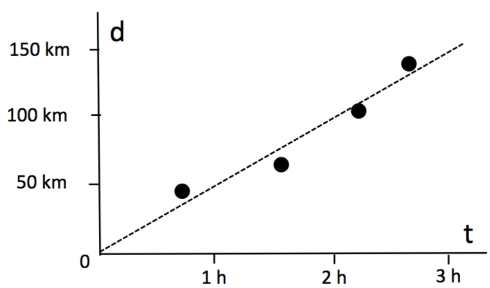
<table>
<tr><th></th><th>Propriété multiplicative</th><th>Égalité des rapports
et
Coefficient de proportionnalité</th><th>Propriété additive</th></tr>
<tr><td>Représentations tabulaires</td><td>× 1,5
<table><tr><td>d</td><td>100 km</td><td>150 km</td></tr><tr><td>t</td><td>2 h</td><td>3 h</td></tr></table></td><td>× v
<table><tr><td>d</td><td>100 km</td><td>150 km</td></tr><tr><td>t</td><td>2 h</td><td>3 h</td></tr></table></td><td><table><tr><td>d</td><td>50 km</td><td>100 km</td><td>50 km + 100 km</td></tr><tr><td>t</td><td>1 h</td><td>2 h</td><td>1 h + 2 h</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Représentations algébriques</td><td>$v = \frac{d}{t} = \frac{100\,km}{2\,h} = \frac{150\,km}{3\,h}$
× 1,5   × 1,5</td><td>$v = \frac{d}{t} = \frac{100\,km}{2\,h} = \frac{150\,km}{3\,h} = 50\,km/h$</td><td>$v = \frac{d}{t} = \frac{50\,km}{1\,h} = \frac{100\,km}{2\,h} = \frac{50\,km + 100\,km}{1\,h + 2\,h}$</td></tr>
<tr><td>Représentations Graphiques-géométriques</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Proportionnalité et graphiques

ou la nécessité de cohérence interdisciplinaire

En mathématiques, des données rendent comptent d'une situation de proportionnalité si les points du graphique sont *parfaitement* alignés, alors qu'en sciences expérimentales, il suffit qu'ils soient *quasiment* ou *en tendance* alignés. Comment retrouver de la cohérence dans le discours tenu auprès des élèves ?

Distinction entre données expérimentales et modèle de dépendance linéaire



Les points du graphique ne sont pas alignés.

Donc, les *valeurs* de la distance parcourue et de la durée ne sont pas proportionnelles.

Cependant, envisagés comme expérimentaux (variabilité des mesures) les points du graphique sont compatibles avec un **modèle** de dépendance linéaire entre la distance et la durée.

Modèle : une proposition de définition

Un modèle est un ensemble de plusieurs **objets théoriques** (ici *la grandeur distance* et *la grandeur temps*) aux propriétés définies et de **relations** qu'entretiennent entre eux ces objets (ici *la linéarité*). On se ramène à un modèle en vue d'analyser une situation et d'en tirer des prédictions (ici *les données expérimentales réalisées ou à venir*).

Un *même* modèle peut prendre des formes *variées et complémentaires* : langage naturel, schémas, maquettes, relations formelles entre grandeurs, graphiques ou encore animations.

La notion de modèle de dépendance linéaire
permet de rendre cohérents
les points de vue des mathématiques et de la physique-chimie
lorsqu'il s'agit d'analyser des données expérimentales.

Isolement de terme

ou l'enjeu du raisonnement face aux astuces

L'isolement de terme (ou la résolution d'équation en mathématiques) donne lieu à l'utilisation de très nombreuses astuces : produits en croix, triangle magique, passer de l'autre côté, escaliers… Si ces astuces permettent l'obtention rapide d'un résultat, elles ne donnent pas de sens et confinent les élèves dans leurs difficultés. Comment replacer le raisonnement au centre des apprentissages ?

Opérations réciproques et signe égal, pour former au raisonnement

$$d = \boxed{v \times} t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{\boxed{v}} = \frac{\boxed{\cancel{v \times}}\, t}{\boxed{\cancel{v}}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{v} = t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{d}{v}$$

Pour compenser l'opération « multiplier par v » on réalise l'opération « diviser par v » (deux traits rouges pour la simplification)

Comme le signe égal signifie « la même chose que », l'opération « diviser par v » est aussi appliquée de l'autre côté du signe égal.

Comme le signe égal signifie « la même chose que », les deux membres de l'égalité peuvent être intervertis.

Opération réciproque :

Le « contraire » de multiplier par v, c'est diviser par v.

Signification du signe égal :

« la même chose que »

Les nombres 2-3-6, pour aborder les opérations réciproques

Tous les élèves connaissent ces trois égalités : $3 = \frac{6}{2}$ $\quad 6 = 3 \times 2$ $\quad 2 = \frac{6}{3}$

S'entrainer à passer d'une expression à l'autre au moyen des opérations réciproques peut aider les élèves à se familiariser avec la manipulation des relations entre grandeurs.

L'approche par opération réciproque est universelle en mathématiques. Travaillée en collège et lycée, elle mobilise les acquis de l'enseignement primaire.

Comme pour la maîtrise de la langue,
l'apprentissage des objets mathématiques
partagés entre disciplines
est l'affaire de tous.

En prendre soin,
c'est mieux former les élèves.

Pour aller plus loin :

La page du groupe Maths-Physique et Chimie de l'IREM :

http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/sections/maths_physique-chimie/

Le site physique-chimie de l'académie de Créteil :

http://pc.ac-creteil.fr/spip.php?rubrique129

Le padlet du groupe :

https://padlet.com/mpc_iremp7/regardscroises

Pour se former avec des collègues de maths et de physique-chimie :

PAF : Regards croisés Maths-PC : calculs et dépendances

CHAPITRE : « INT » (pour interdisciplinaire)

Pour nous contacter :

mpc@irem.univ-paris-diderot.fr